Гусев А., Долгова П., Кушнир А., Обухов Б., Орлов О., Попов Л., Соколов А., Тихонов Ю.

Последний листик

1. На плоскости даны четыре прямые общего положения. По каждой прямой с постоянной скоростью идёт пешеход. Известно, что первый встречается со вторым, с третьим и с четвёртым, а второй встречается с третьим и с четвёртым. Доказать, что третий пешеход встретится с четвёртым.

2. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место таких точек M плоскости, что радиусы окружностей, описанных около треугольников AMB, BMC и CMA, равны.

3. Натуральные числа a и m таковы, что для каждого натурального $1 < k < m$, взаимно простого с m, число $a^k - k$ делится на m. Найдите все возможные значения m.

4. В таблице 100×100 расставлены числа от 1 до 10 000 (в каждой клетке одно число, все числа различны). Разрешается закрасить k клеток таблицы, после чего производятся следующие действия: выбирается закрашенная клетка и красятся все клетки её строки, меньшие выбранной, и все клетки её столбца, большие выбранной. При каком наименьшем k для любой расстановки чисел в таблице можно так закрасить k клеток, чтобы описанными действиями можно было закрасить всю таблицу?

5. Точки H, O — ортоцентр и центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC соответственно. Серединный перпендикуляр к отрезку BH пересекает стороны BA, BC в точках A_0, C_0 соответственно. Докажите, что
(a) BO — биссектриса угла A_0OC_0;
(b) периметр треугольника A_0OC_0 равен AC.

6. На доске написано число 11. За один ход можно либо поставить между двумя любыми цифрами 1 и при этом каждое из них увеличить на 1 или уменьшить на 1 (можно в разные стороны; уменьшать 1 нельзя, увеличивать 9 нельзя); либо убрать любую единицу, у которой есть два соседа, при этом также изменив обоих соседей на 1. Можно ли в итоге получить 22?

7. Для каждого натурального n обозначим через a_n количество цифр $5, 6, 7, 8, 9$ в десятичной записи числа 2^n. Вычислите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$.

8. Король решил казнить n мудрецов. Их поставят в ряд друг за другом (так, чтобы все смотрели в одном направлении), на каждого наденут шляпу белого или черного цвета. Каждый мудрец будет видеть шляпы всех впереди стоящих. У каждого мудреца по очереди (от последнего к первому) спросят цвет его шляпы, и если он угадает, то его помилуют (но уже по окончании опроса). Кроме цвета при ответе разрешается назвать любое натуральное число.

Мудрецам разрешили договориться заранее, но оказалось, что k из них безумны (а кто, неизвестно). Безумный мудрец называет случайный цвет и случайное число вне зависимости от договоренностей. Какое максимальное количество мудрецов может гарантированно спастись?