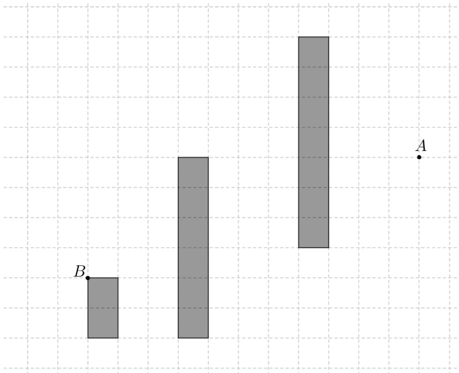
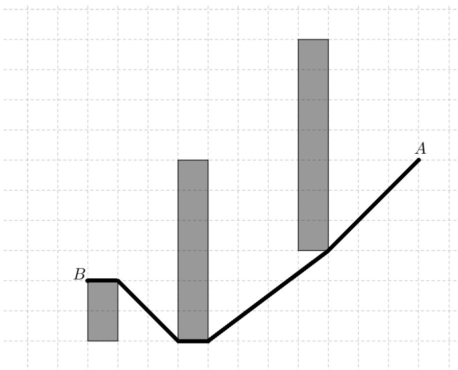
III Иранская олимпиада по геометрии. Начинающие

1. Али хочет добраться из точки A в точку B (см. рис.). По дороге ему нельзя заходить в закрашенные участки плоскости, а в остальные — можно. Путешествовать Али можно не только по линиям сетки, но и по всей плоскости. Помогите Али найти самый короткий путь из точки A в точку B. Просто нарисуйте путь и посчитайте его длину. (*Morteza Saghafian*)



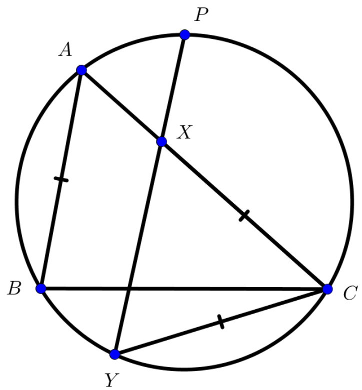
Решение. Длина наименьшего пути равна $7 + 5\sqrt{2}$.



2. Вокруг треугольника ABC ($AC > AB$) описана окружность ω. На стороне AC выбрана точка X, а на окружности ω — точка Y так, что $CX = CY = AB$, а точки A и Y лежат по разные стороны от прямой BC. Прямая XY вторично пересекает окружность ω в точке P. Докажите, что $PB = PC$. (*Iman Maghsoudi*)

Решение. Поскольку $AB = YC$, то дуги AB и YC равны. Угол YXC равен полусумме дуг AP и YC, то есть половине дуги BP. Но $\angle YXC =$

$\angle XYC$, а угол XYC равен половине луги PC. Поэтому точка P является серединой дуги BAC, откуда $PB = PC$.



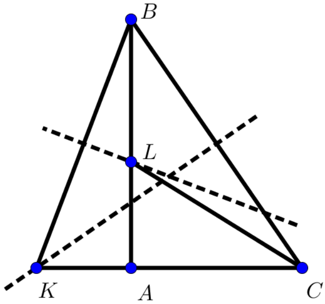
3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ никакие две стороны не параллельны. На каждой паре его соседних сторон построили параллелограммы. Докажите, что среди четырех новых точек ровно одна лежит внутри четырёхугольника $ABCD$. (*Morteza Saghafian*)

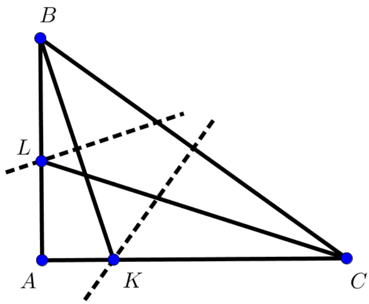
Решение. Понятно, что луч с началом в точке B, проходящий параллельно AD, проходит через четырехугольник тогда и только тогда, когда $\angle DAB + \angle ABC > 180°$.

Среди пар вершин A и B, C и D ровно в одной паре сумма углов больше $180°$. Аналогично среди пар вершин A и D, B и C ровно в одной паре сумма углов больше $180°$. Эти две пары имеют общую вершину, без ограничения общности это вершина A. Тогда лучи из точки A параллельные сторонам BC и CD проходят через четырехугольник, а, следовательно, в силу выпуклости четырехугольника $ABCD$ пересекаются внутри. Если мы возьмем любые две другие пары, то в одной из них сумма углов будет меньше $180°$, поэтому вершина соответствующего параллелограмма будет лежать вне четырехугольника.

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Серединный перпендикуляр к гипотенузе BC пересекает прямую AC в точке K, а серединный перпендикуляр к отрезку BK пересекает прямую AB в точке L. Оказалось, что CL — биссектриса угла ACB. Найдите все возможные значения углов B и C. (*Mahdi Etesami Fard*)

Решение. *Первый случай:* точка K лежит на продолжении стороны AC ($AC \leqslant AB$). Как известно, серединный перпендикуляр к стороне треугольника пересекается с биссектрисой соответствующего угла на описанной окружности треугольника. В треугольнике BKC серединный перпендикуляр к стороне BK и биссектриса угла C пересекаются в точке L, то есть внутри треугольника. Поэтому они совпадают, откуда $BC = KC$. По построению $BK = KC$, поэтому треугольник BKC равносторонний, откуда $\angle B = 30°$, $\angle C = 60°$.





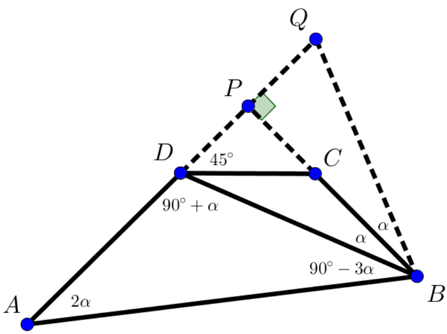
Второй случай: точка K лежит на стороне AC ($AC > AB$). Заметим, что радиусы описанных окружностей треугольников LKC и BLC равны, поскольку $BL = LK$ и $\angle BCL = \angle LCK$. Поскольку угол LKC — тупой, а угол B — острый, то из "четвертого признака равенства треугольников" (или из теоремы синусов) следует, что $\angle LBC + \angle LKC = 180°$. Отсюда $\angle LBK = \angle LCK$, поэтому, обозначив $\angle LCK = \alpha$, имеем $\angle B = \angle LBK + \angle KBC = 3\alpha$, $\angle C = 2\alpha$, то есть $\angle B = 54°$, $\angle C = 36°$.

5. Про выпуклый четырёхугольник $ABCD$ известно, что

$$\angle ADC = 135°, \quad \angle ADB - \angle ABD = 2\,\angle DAB = 4\,\angle CBD, \quad BC = \sqrt{2}\,CD.$$

Докажите, что $AB = BC + AD$. (*Mahdi Etesami Fard*)

Решение. Обозначим $\angle CBD = \alpha$, тогда $\angle DAB = 2\alpha$.



Из условия имеем

$$\angle ADB - \angle ABD = 4\alpha, \quad \angle ADB + \angle ABD = 180° - 2\alpha,$$

отсюда $\angle ADB = 90^\circ + \alpha$, $\angle ABD = 90^\circ - 3\alpha$. Пусть P — точка пересечения прямых AD и BC. Поскольку $\angle DAB + \angle ABC = 90^\circ$, то $\angle BPA = 90^\circ$.

Рассмотрим точку Q, лежащую на луче DP такую, что $DP = PQ$. Поскольку $\angle PDC = 45^\circ$, то $DC = \sqrt{2}\,DP$, откуда $BC = 2DP = DQ$. Заметим, что треугольник DBQ равнобедренный, поэтому $\angle DQB = 90^\circ - \alpha = \angle ABQ$, то есть $AQ = AB$. Но $AQ = AD + DP = AD + BC$.

III Иранская олимпиада по геометрии. Продолжающие

1. На боковых сторонах трапеции $ABCD$ ($AB||CD$) как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2. Пусть X и Y — произвольные точки на ω_1 и ω_2 соответственно. Докажите, что длина отрезка XY не превосходит половины периметра четырёхугольника $ABCD$. (*Mahdi Etesami Fard*)

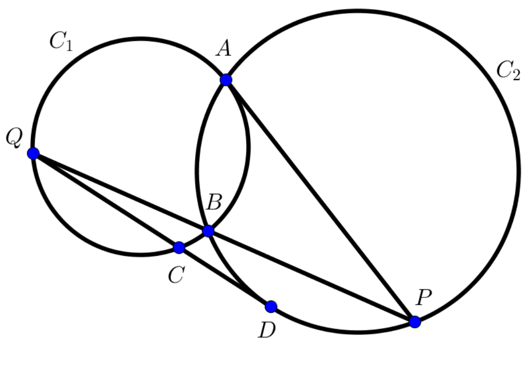
Решение 1. Обозначим через O_1 и O_2 центры окружностей ω_1 и ω_2. Тогда

$$XY \leqslant XO_1+O_1O_2+O_2Y = \frac{AD}{2}+\frac{AB+CD}{2}+\frac{BC}{2} = \frac{AB+BC+CD+DA}{2}.$$

Решение 2. Точки на окружностях, между которыми достигается наибольшее расстояние — это точки пересечения линии центров с окружностями. Для них достигается равенство.

2. Окружности C_1 и C_2 пересекаются в точках A и B. Касательная в точке A к окружности C_1 пересекает C_2 в точке P. Прямая PB вторично пересекает C_1 в точке Q. Из точки Q проведена касательная QD к окружности C_2 такая, что точки A и D лежат по разные стороны от прямой PQ. Эта касательная вторично пересекает C_1 в точке C. Докажите, что AD является биссектрисой угла CAP. (*Iman Maghsoudi*)

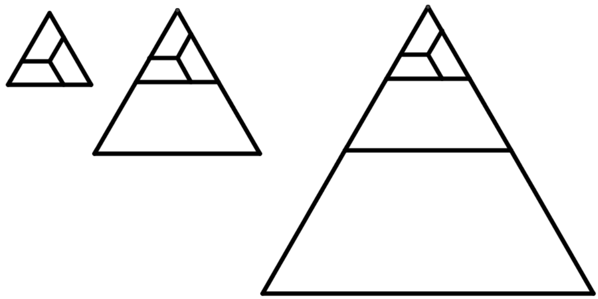
Решение. Угол DQP равен полуразности дуг DP и BD, то есть $\angle CQB = \angle PAD - \angle DAB$. Отсюда $\angle PAD = \angle CQB + \angle DAB = \angle CAB + \angle DAB = \angle CAD$.



3. Найдите все натуральные числа N такие, что существует треугольник, который можно разрезать на N подобных четырёхугольников.

(*Nikolai Beluhov, Morteza Saghafian*)

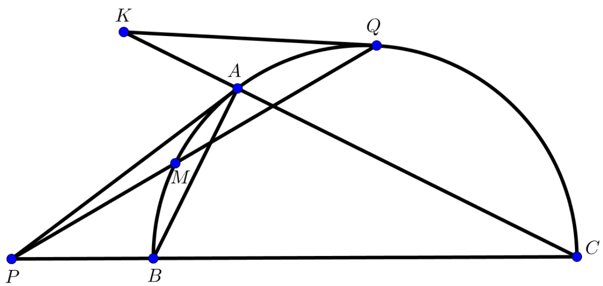
Решение. Понятно, что $N = 1$ не подходит. Также не подходит $N = 2$, поскольку один из четырехугольников обязательно будет выпуклым, а второй — нет. Для $N \geqslant 3$ пример приведен ниже.



4. Касательная в точке A описанной окружности ω прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 90^\circ$) пересекает прямую BC в точке P. Точка M — середина дуги AB, не содержащей вершину C. Прямая PM пересекает ω второй раз в точке Q. Касательная к ω в точке Q пересекает прямую AC в точке K. Докажите, что $\angle PKC = 90^\circ$. (*Davood Vakili*)

Решение. Предположим, что $AB < AC$ (случай $AB > AC$ аналогичен). Покажем, что $PK \parallel AB$. Из подобия пар треугольников PMA и PAQ, PMB и PCQ, PBA и PAC имеем равенства

$$\frac{AQ}{MA} = \frac{PQ}{PA}, \quad \frac{MB}{QC} = \frac{PB}{PQ}, \quad \frac{AC}{BA} = \frac{PA}{PB}.$$



Поскольку $MA = MB$, то, перемножив все три равенства, имеем $\frac{AQ}{QC} = \frac{BA}{AC}$. Из подобия пар треугольников KAQ и KQC, PBA и PAC получаем

$$\frac{KA}{KQ} = \frac{KQ}{KC} = \frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{KA}{KC} = \left(\frac{AQ}{QC}\right)^2, \quad \frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PC} = \frac{BA}{AC} \Rightarrow \frac{PB}{PC} = \left(\frac{BA}{AC}\right)^2.$$

Но тогда имеем $\frac{KA}{KC} = \frac{PB}{PC}$, что дает нужную параллельность.

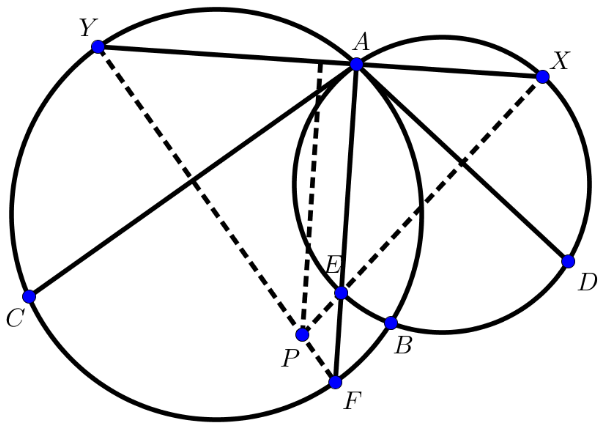
5. Окружности ω и ω' пересекаются в точках A и B. Касательная к окружности ω в точке A пересекает ω' в точке C; касательная к окружности ω' в точке A пересекает ω в точке D. Биссектриса угла CAD пересекает ω и ω' в точках E и F соответственно. Внешняя биссектриса угла CAD пересекает ω и ω' в точках X и Y соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку XY касается описанной окружности треугольника BEF.

(*Mahdi Etesami Fard*)

Решение. Пусть P — точка пересечения прямых YP и XE. Тогда

$$\angle PXA = \angle CAF = \angle DAF = \angle FYA,$$

поэтому треугольник PXY равнобедренный, то есть точка X лежит на серединном перпендикуляре к XY.



Заметим, что

$$\angle FBE = \angle FBA - \angle EBA = (180^\circ - \angle FYA) - \angle EXA = 180^\circ - 2\angle PXA,$$

поэтому $\angle FBE + \angle FPE = 180^\circ$, то есть четырехугольник $PEBF$ вписанный. Поскольку $\angle AFP = 90^\circ - \angle FYA = 90^\circ - \angle EXA = \angle PEF$, то точка P — это середина дуги EPF описанной окружности четырехугольника $PEBF$. Так как $AF \perp XY$, то серединный перпендикуляр к XY параллелен прямой EF, а значит он касается описанной окружности $PEBF$.

III Иранская олимпиада по геометрии. Профессионалы

1. Окружности ω и ω' пересекаются в точках A и B. Касательная к окружности ω в точке A пересекает окружность ω' в точке C; касательная к окружности ω' в точке A пересекает ω в точке D. Прямая CD пересекает окружности ω и ω' в точках E и F соответственно. Перпендикуляр из точки E к прямой AC пересекает ω' в точке P; перпендикуляр из точки F к прямой AD пересекает ω в точке Q. Оказалось, что точки A, P и Q лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой. *(Mahdi Etesami Fard)*

Решение. Поскольку AD и AC касаются окружностей ω' и ω, то $\angle AFC = 180^\circ - \angle APC = 180^\circ - \angle CAD = \angle AEF$. Тогда

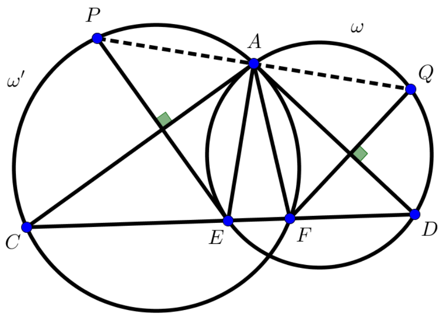
$$\angle AFD = 180^\circ - \angle AFE = 180^\circ - \angle AEF = \angle AQD.$$

Получаем, что точки F и Q симметричны относительно прямой AD. Аналогично точки E и P симметричны относительно AC. Отсюда

$$\angle QAD = \angle FAD = \angle FCA, \quad \angle PAC = \angle EAC = \angle EDA,$$

$$\angle PAQ = \angle PAC + \angle CAD + \angle QAD = \angle FCA + \angle CAD + \angle EDA = 180^\circ,$$

то есть точки P, A, Q лежат на одной прямой.

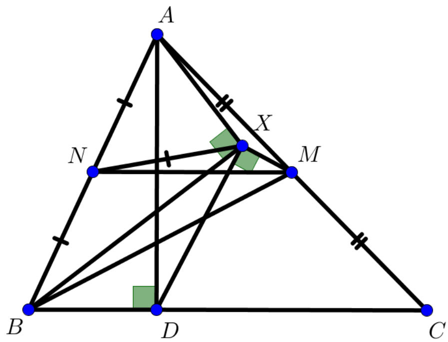


2. В остроугольном треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, AD — высота. Внутри треугольника ABC отметили точку X такую, что $\angle AXB = \angle DXM = 90^\circ$. Докажите, что $\angle XMB = 2\angle MBC$. *(Davood Vakili)*

Решение 1. Обозначим через N середину стороны AB. Поскольку $MN \parallel BC$, то $\angle MBC = \angle NMB$. Поэтому достаточно доказать, что MN является биссектрисой угла XMB. Заметим, что четырехугольник $AXDB$ вписанный, поэтому

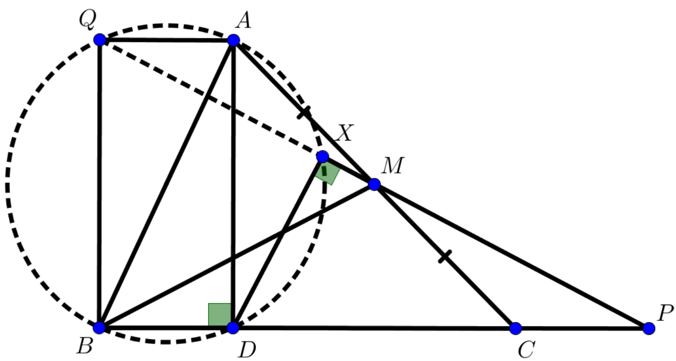
$$\angle BXD = \angle BAD = 90^\circ - \angle ABC, \quad \angle BXM = 180^\circ - \angle ABC = \angle BNM,$$

то есть четырехугольник $BNXM$ вписанный. Поскольку $NA = BN = NX$, то углы, опирающиеся на дуги BN и NX равны, то есть MN — биссектриса угла BMX.



Решение 2. Пусть P — точка пересечения прямых XM и BC, Q — такая точка, что четырехугольник $ADBQ$ является прямоугольником. Поскольку $\angle ADP = \angle DXP = 90^\circ$, то $\angle ADX = \angle XPD$. Пятиугольник $QAXDB$ вписанный, поэтому $\angle AQX = \angle ADX = \angle XPD$, откуда точки Q, X, P лежат на одной прямой в силу параллельности AQ и BP.

Поскольку точка M является серединой отрезка AC, то она является и серединой отрезка QP. Поэтому BM — медиана прямоугольного треугольника QBP, откуда $\angle XMB = 2\angle MBC$.



3. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, причем точка A лежит между D и P. Точки I_1 и I_2 —

центры вписанных окружностей треугольников PAB и PDC соответственно. Пусть O – центр описанной окружности треугольника PAB, H — ортоцентр треугольника PDC. Докажите, что описанные окружности треугольников AI_1B и DHC касаются тогда и только тогда, когда касаются описанные окружности треугольников AOB и DI_2C. *(Hooman Fattahimoghaddam)*

Решение. Предположим, что описанные окружности треугольников AI_1B и DHC касаются в точке K. Обозначим через Q вторую точку пересечения описанных окружностей треугольников AKD и BKC. Поскольку верны равенства

$$\angle DHC = \angle DKC = 180^\circ - \angle P, \quad \angle P + \angle PDK + \angle PCK = \angle DKC,$$

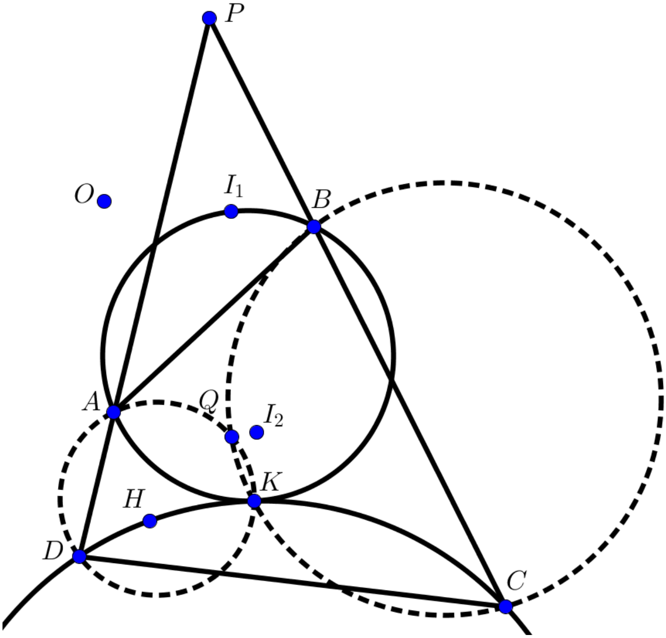
то $\angle PDK + \angle PCK = 180^\circ - 2\angle P$. Из вписанности четырехугольников $AQKD$ и $BQKC$ имеем равенства

$$\angle AQK = 180^\circ - \angle PDK, \quad \angle BQK = 180^\circ - \angle PCK.$$

Отсюда $\angle AQB = \angle PDK + \angle PCK = 180^\circ - 2\angle P = 180^\circ - \angle AOB$, то есть четырехугольник $AOBQ$ вписанный. Также имеем равенства

$$\angle AKD = \angle AQD, \quad \angle BKC = \angle BQC, \quad \angle AQB = \angle DKC - \angle P,$$

поэтому $\angle CQD = \angle AKB + \angle P = 180^\circ - \angle AI_1B + \angle P = 90^\circ + \frac{\angle P}{2} = \angle CI_2D$, откуда четырехугольник $CDQI_2$ вписанный.



Докажем, что описанные окружности треугольников AOB и DI_2C касаются в точке Q. Для этого достаточно доказать, что

$$\angle ABQ + \angle DCQ = \angle AQD.$$

В силу того, что описанные окружности треугольников AI_1B и DHC касаются, имеем

$$\angle AKD = \angle ABK + \angle DCK = (\angle ABQ + \angle KBQ) + (\angle DCQ - \angle KCQ).$$

Но $\angle KBQ = \angle KCQ$, $\angle AKD = \angle AQD$, поэтому $\angle AQD = \angle ABQ + \angle DCQ$.

Обратно, предположим, что описанные окружности треугольников AOB и DI_2C касаются друг друга в точке Q. Тогда, обозначив через K вторую точку пересечения описанных окружностей треугольников AQD и BQC, аналогично показывается, что описанные окружности треугольников AI_1B и DHC касаются в точке K.

Замечание. *Существует и другое решение, использующее инверсию с центром в точке Микеля четырехугольника.*

4. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, продолжения сторон AD и BC — в точке F, причем точка A лежит между точками B и E, а также между точками D и F. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Окружность ω_1 проходит через точку D и касается прямой AC в точке P. Окружность ω_2 проходит через точку C и касается прямой BD в точке P. Пусть X — точка пересечения окружности ω_1 и прямой AD, а Y — точка пересечения окружности ω_2 и прямой BC. Пусть Q — вторая точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Докажите, что перпендикуляр из точки P к прямой EF проходит через центр описанной окружности треугольника XQY. *(Iman Maghsoudi)*

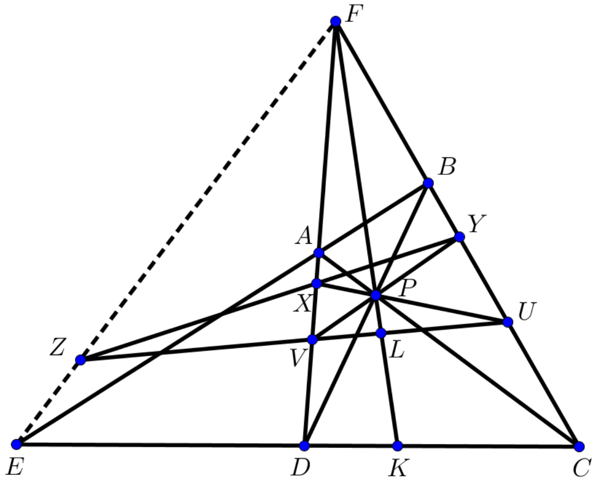
Решение 1.

Лемма 1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ прямые AB и CD пересекаются в точке E, прямые BC и AD — в точке F, а диагонали AC и BD — в точке P. Пусть X и Y — произвольные точки на сторонах AD и BC соответственно. Пусть U — точка пересечения прямых BC и PX, а V — точка пересечения AD и PY. Тогда прямые XY и UV пересекаются на прямой EF.

Замечание. Утверждение леммы следует из того, что прямая EF является полярой точки P относительно угла BEC. Также лемму можно доказать, используя проективные преобразования: достаточно сделать преобразование, переводящее прямую EF в бесконечно удаленную прямую.

Доказательство леммы 1. Пусть прямые XY и UV пересекаются в точке Z, прямые PF и UV — в точке L, прямые PF и CD — в точке K, а прямые ZF и CD — в точке E'. Поскольку $(Z, L, V, U) = -1$, то

$(E', K, D, C) = -1$. Но в силу того, что $(E, K, D, C) = -1$, точки E и E' совпадают.

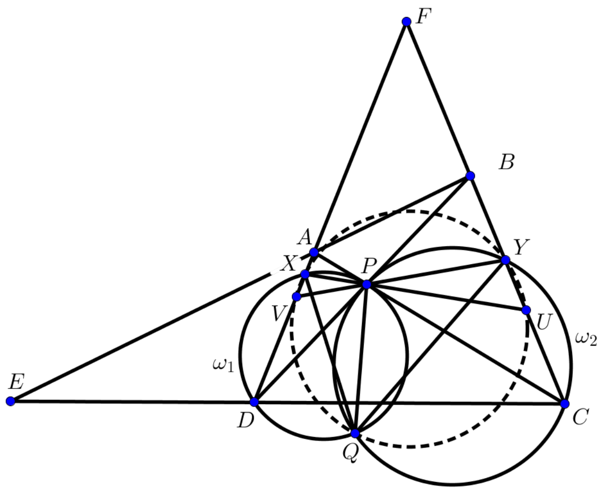


Лемма 2. Точка O — центр описанной окружности четырехугольника $ABCD$, P — точка пересечения его диагоналей. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F. Тогда $OP \perp EF$.

Доказательство леммы 2. Прямая EF является полярой точки P относительно описанной окружности четырехугольника $ABCD$, поэтому $OP \perp EF$.

Вернемся к решению задачи. Пусть прямые PX и BC пересекаются в точке U, а прямые PY и AD — в точке V. Заметим, что

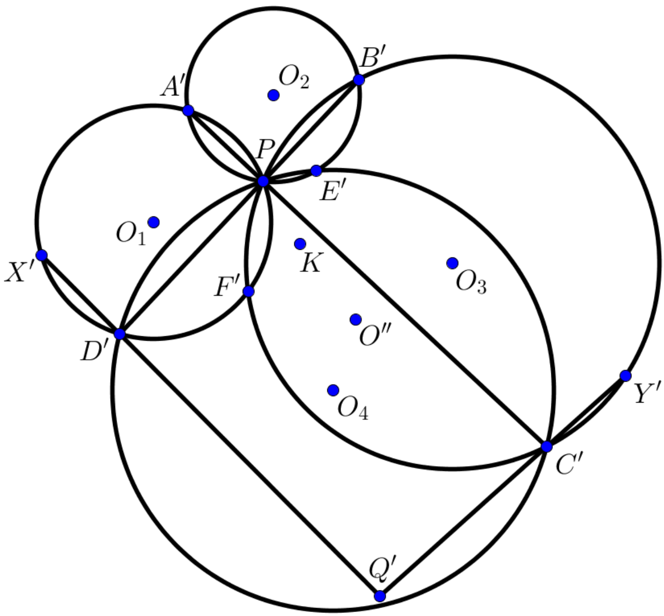
$$\angle XQP = \angle XDP = \angle XPA = \angle UPC, \quad \angle YQP = \angle YCP = \angle YPB = \angle VPD.$$



Отсюда $\angle XVY = \angle XQY = \angle XUY$, поэтому пятиугольник $QVXYU$ — вписанный. Пусть O — центр его описанной окружности. Согласно лемме 1, прямые UV и XY пересекаются на прямой EF, тогда из леммы 2 следует, что $OP \perp EF$.

Решение 2.

Обозначим через O центр описанной окружности треугольника XQY. Сделаем инверсию с центром в точке P. Будем обозначать через A' образ точки A при этой инверсии, другие точки обозначаются аналогично.

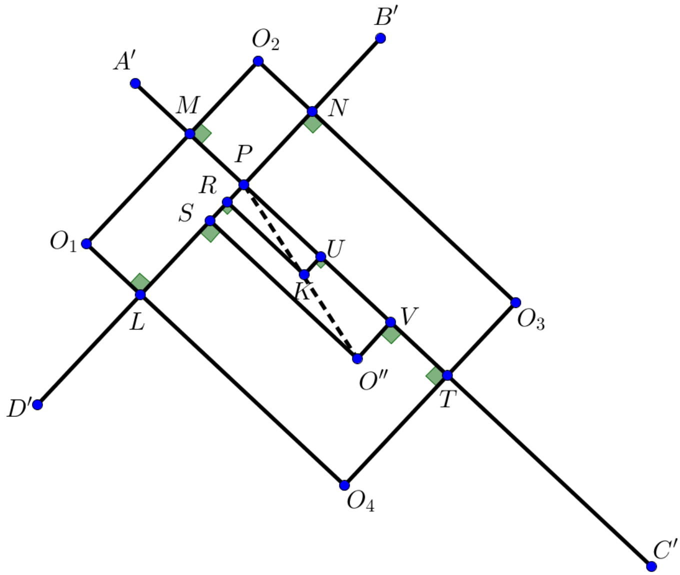


Нам нужно показать, что PO' содержит диаметр описанной окружности треугольника $E'PF'$. Обозначим через O'' центр описанной окружности треугольника $X'Q'Y'$. Мы знаем, что точки P, O', O'' лежат на одной прямой, поэтому достаточно показать, что прямая PO'' проходит через центр описанной окружности треугольника $E'PF'$.

Обозначим через O_1, O_2, O_3, O_4 центры окружностей, как на рисунке, а через K — точку пересечения прямых O_1O_3 и O_2O_4. Поскольку точка K лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам PF' и PE', то она является центром описанной окружности треугольника $PE'F'$. Из того, что $D'B'Y'Q'$ — равнобокая трапеция, следует, что O'' лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $B'D'$. Аналогично O'' лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $A'C'$.

Обозначим точки пересечения пар прямых $A'C'$ и O_1O_2, $A'C'$ и O_3O_4, $B'D'$ и O_2O_3, $B'D'$ и O_1O_4 за M, T, N, L. Пусть U и V — проекции точек

K и O'' на прямую $A'C'$, R и S — проекции точек K и O'' на прямую $B'D'$.



Мы знаем, что $O_1O_2 \perp A'C'$, $O_3O_4 \perp A'C'$, поэтому $O_1O_2 \parallel O_3O_4$. Аналогично $O_1O_4 \perp O_2O_3$. Отсюда следует, что $O_1O_2O_3O_4$ — параллелограмм, а K — точка пересечения его диагоналей. Отсюда $UM = UT$. Также верны равенства $A'M = MP$ и $C'T = TP$, откуда

$$PV = A'V - A'P = \frac{1}{2}A'C' - 2PM = (PM + PT) - 2PM = PT - PM,$$

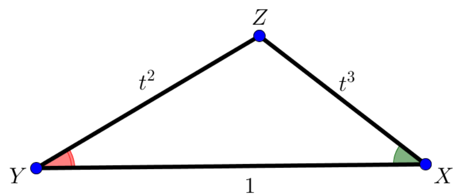
$$TV = PT - PV = PM, \quad UP = UM - MP = UT - VT = UV.$$

Аналогично доказывается, что $PR = RS$, откуда точки P, K, O'' лежат на одной прямой.

5. Существуют ли шесть точек плоскости X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 такие, что треугольники $X_iY_jZ_k$ подобны для всех наборов i, j, k, $1 \leqslant i, j, k \leqslant 2$?

(Morteza Saghafian)

Решение. *(Илья Богданов)* Рассмотрим треугольник XYZ такой, что $XY = 1$, $YZ = t^2$, $ZX = t^3$ и $\angle Z = \angle X + 2\angle Y$.



Такой треугольник существует, поскольку для минимально возможного t выполнено $\angle Z > \angle X + 2\angle Y$, а для $t = 1$ выполнено $\angle Z < \angle X + 2\angle Y$. Тогда по непрерывности указанный треугольник существует. Тогда указанная ниже конструкция удовлетворяет условиям задачи.