9 класс | Симедиана | 11 мая 2017

Определение. *Симедианой* треугольника называется прямая, симметричная его медиане относительно биссектрисы угла, из которого проведена медиана.

1. а) Пусть BK — симедиана треугольника ABC. Докажите, что $AK : KC = AB^2 : BC^2$.

б) Точка X внутри треугольника ABC такова, что $\angle ABX = \angle CAX$, $\angle ACX = \angle BAX$. Докажите, что AX — симедиана треугольника ABC.

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC вовне построены квадраты $ABXY$ и $BCKL$. Прямые XY и KL пересекаются в точке S. Докажите, что BS — симедиана треугольника ABC.

3. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает его описанную окружность ω в точке E, а сторону AC — в точке D. Окружность, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает ω в точке $F \neq E$. Докажите, что BF — симедиана треугольника ABC.

4. В треугольнике ABC высота BH пересекает описанную окружность ω треугольника ABC в точке H', а точка M — середина стороны AC. Описанная окружность треугольника HMH' пересекает ω в точке $X \neq H'$. Докажите, что BX — симедиана треугольника ABC.

5. Докажите, что во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ произведения противоположных сторон равны тогда и только тогда, когда BD является симедианой треугольника ABC.

6. а) Точка Лемуана. Докажите, что три симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что точка внутри треугольника является точкой Лемуана тогда и только тогда, когда $x : y : z = a : b : c$, где x, y, z — расстояния от неё до сторон, a, b, c — длины соответствующих сторон.

в) Докажите, что точка Лемуана — это такая точка внутри треугольника, для которой сумма квадратов расстояний до сторон — наименьшая.

г) Для треугольника ABC обозначим через l_a прямую, проходящую через середину стороны BC и середину высоты, опущенной из вершины A. Аналогично определяются l_b и l_c. Докажите, что прямые l_a, l_b, l_c пересекаются в одной точке. Что же это за точка?

9 класс | Симедиана | 11 мая 2017

Определение. *Симедианой* треугольника называется прямая, симметричная его медиане относительно биссектрисы угла, из которого проведена медиана.

1. а) Пусть BK — симедиана треугольника ABC. Докажите, что $AK : KC = AB^2 : BC^2$.

б) Точка X внутри треугольника ABC такова, что $\angle ABX = \angle CAX$, $\angle ACX = \angle BAX$. Докажите, что AX — симедиана треугольника ABC.

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC вовне построены квадраты $ABXY$ и $BCKL$. Прямые XY и KL пересекаются в точке S. Докажите, что BS — симедиана треугольника ABC.

3. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает его описанную окружность ω в точке E, а сторону AC — в точке D. Окружность, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает ω в точке $F \neq E$. Докажите, что BF — симедиана треугольника ABC.

4. В треугольнике ABC высота BH пересекает описанную окружность ω треугольника ABC в точке H', а точка M — середина стороны AC. Описанная окружность треугольника HMH' пересекает ω в точке $X \neq H'$. Докажите, что BX — симедиана треугольника ABC.

5. Докажите, что во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ произведения противоположных сторон равны тогда и только тогда, когда BD является симедианой треугольника ABC.

6. а) Точка Лемуана. Докажите, что три симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что точка внутри треугольника является точкой Лемуана тогда и только тогда, когда $x : y : z = a : b : c$, где x, y, z — расстояния от неё до сторон, a, b, c — длины соответствующих сторон.

в) Докажите, что точка Лемуана — это такая точка внутри треугольника, для которой сумма квадратов расстояний до сторон — наименьшая.

г) Для треугольника ABC обозначим через l_a прямую, проходящую через середину стороны BC и середину высоты, опущенной из вершины A. Аналогично определяются l_b и l_c. Докажите, что прямые l_a, l_b, l_c пересекаются в одной точке. Что же это за точка?