Серия 4. Сравнения по модулю, воспоминания о теоремах Ферма и Эйлера.

1. Докажите, пожалуйста, что для простого числа p число $2^{p^2}-2$ делится на p.

2. а) Найдите все простые числа p такие, что 2^p+1 делится на p.

б) Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $2^n+1 \vdots n$.

3. Докажите, что существует бесконечно много составных чисел вида 10^n+3.

4. Докажите, что $30^{239}+239^{30}$ — составное.

5. Пусть p — простое число, тогда $(11\ldots122\ldots233\ldots99-123456789)$ (в первом числе каждая цифра встречается ровно p раз) делится на p.

6. а) Докажите, что ни при каком n число n^2+1 не делится на 103.
б)Докажите, что ни при каком целом k число k^2+k+1 не делится на 101.

7. Пусть a и n — натуральные числа. Докажите, что $a^n \equiv a^{n-\varphi(n)} \pmod n$

8. Докажите, что существует такая натуральная степень 5, что в её десятичной записи встречается 2016 нулей подряд.

Письменное домашнее задание

1. а) Натуральные a, b, c, d, e таковы, что $a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12}+e^{12}$ делится на 13. Докажите, что $abcde$ делится 13^5.
б) Натуральные a, b, c, d, e таковы, что $a^6+b^6+c^6+d^6+e^6$ делится на 13. Докажите, что $abcde$ делится 13.

2. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a+b+c$ делится на 30. Докажите, что $a^5+b^5+c^5$ делится на 30.

3. Докажите, что любой простой делитель числа 2^p-1 имеет вид $2kp+1$.