Серия 8. Раскраски.

1. Замкнутая ломаная расположена на плоскости так, что координаты всех её вершин – целые числа. Оказалось, что длины всех звеньев равны. Докажите, что количество звеньев чётно.

2. Назовём клетку квадрата 7×7 *удачной*, если при её удалении оставшуюся доску можно разрезать на прямоугольники 1×3. Сколько всего удачных клеток?

3. Назовём клетку квадрата 11×11 *неудачной*, если при её удалении оставшуюся доску можно разрезать на прямоугольники 1×4. Сколько всего неудачных клеток?

4. Квадрат $n \times n$ без угловой клетки разрезали на прямоугольники $1 \times k$. Докажите, что $n - 1$ делится на k.

5. Дан прямоугольник 2016×2017. Можно ли из последнего столбца удалить две клетки, чтобы остальное можно было разрезать на прямоугольники 1×5 и кресты из 5 клеток?

6. В левый нижний угол шахматной доски 8×8 поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может прыгать на свободное поле через рядом стоящую фишку, то есть симметрично отражаться относительно её центра (прыгать можно по вертикали, горизонтали и диагонали). Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки вновь в форме квадрата 3×3, но в другом углу: а) левом верхнем, б) правом верхнем?

7. План города представляет собой плоскость, разбитую на одинаковые правильные треугольники. Стороны треугольников – шоссейные дороги, а вершины треугольников – перекрестки. Из двух соседних перекрестков одновременно в одном направлении с одинаковыми скоростями выезжают две машины. Доехав до любого перекрёстка, каждая машина может или продолжить свое движение в том же направлении, или же повернуть на $120°$ вправо или влево. Могут ли машины встретиться?

8. Можно ли доску размерами $4 \times N$ обойти ходом коня, побывав на каждом поле ровно один раз, и вернуться на исходное поле?