# Серия 2. Неравенства.

**1.** а) Докажите, что если $x, y, z > 0$ и $\frac{x}{y} < 1$, то $\frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+z}$.

б) Пусть $a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$. Оказалось, что $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$. Докажите, что $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} < \frac{a_2}{b_2}$.

**2.** На доске написана дробь $\frac{5}{8}$. За один ход можно умножить числитель и знаменатель дроби на одно и то же натуральное число, прибавить к числителю и знаменателю одно и то же натуральное число или поделить числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число в том случае, если числитель и знаменатель снова получатся целыми. Какие дроби можно получить за конечное число ходов?

**3.** Для положительного $x$ докажите, что $\frac{2x}{(x+1)^2} \geqslant \frac{x}{x^2+1}$.

**4.** Пусть $x, y, z$ положительные числа. Докажите, что

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \leqslant 2.$$

**5.** Для положительных $a, b, c, d$ докажите, что

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+c} < 2.$$

**6.** Для положительных чисел $a, b, c$ докажите, что

$$\frac{2a^2+b^2+c^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{2b^2+c^2+b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{2c^2+a^2+b^2}{(c+a)(c+b)} \leqslant 3\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

---

**А здесь может помочь индукция.**

**7.** Для произвольных положительных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ докажите, что

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

**8.** **(Неравенство Бернулли.)** При $n \in \mathbb{N}$, $x > -1$ докажите неравенство

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

**9.** Докажите, что $1,01^{1000} > 1000$.

**10.** Для натуральных $m$ и $n$ докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} \geqslant 1$$

**11.** а) Для натурального $n$ докажите, что $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$.

б) Для натурального $n$ докажите, что $(1+\frac{1}{n})^{n+1} > (1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$.

в) Пусть $a > b$ – натуральные числа. Когда $a^b > b^a$?