Серия 23. Неравенства. Метод Штурма.

1. а) Как изменяются при сближении двух положительных чисел с фиксированной суммой их произведение и сумма квадратов? А сумма обратных величин?
б) Как меняется сумма и сумма обратных величин при сближении с фиксированным произведением?

2. Докажите неравенства о средних с помощью метода Штурма:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

для положительных $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$.

3. Сумма положительных чисел x_1, x_2, …, x_n равна 1. Докажите, что

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{x_1x_2\ldots x_n} \geqslant (n-1)^n$$

4. Докажите, что для неотрицательных $x_1, x_2, \ldots x_n$ с суммой 1 выполнено неравенство

$$(1+x_1)(2+x_2)\ldots(n+x_n) \leqslant 2n!.$$

5. а) Числа $a_1 > a_2 > a_3$ и $b_1 > b_2 > b_3$ таковы, что $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, $a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3$. Что больше $a_1^2+a_2^2+a_3^2$ или $b_1^2+b_2^2+b_3^2$?
б) Числа $a_1 > a_2 > a_3$ и $b_1 > b_2 > b_3$ таковы, что $a_1 > b_1$, $a_1+a_2 > b_1+b_2$, $a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3$. Что больше $a_1^2+a_2^2+a_3^2$ или $b_1^2+b_2^2+b_3^2$?

6. Докажите, что для положительных $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_9$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}+\frac{1}{a_6+a_7+a_8}+\frac{1}{a_9} \geqslant \frac{1}{a_1+a_2+a_3}+\frac{1}{a_4+a_5+a_6}+\frac{1}{a_7+a_8+a_9}.$$

7. Для положительных $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_7$ докажите, что

$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+a_5^2-a_6^2+a_7^2 \geqslant (a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7)^2.$$

Сдаём письменно.

1. Даны числа $x_1, \ldots x_n \geqslant 1$, где $n \geqslant 2$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{1}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}.$$

2. Пусть $x_1+\ldots+x_n = \frac{1}{2}$, а все x_i — неотрицательны. Докажите, что

$$\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1-x_n}{1+x_n} \geqslant \frac{1}{3}.$$