Серия 22. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

Для действительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ имеет место неравенство

$$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^2$$

Во всех задачах, кроме 4, числа положительные

1. (Неравенство Минковского).

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}) \geq n^2$$

2. $n(x_1 + x_2 + ... + x_n) \geq (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + ... + \sqrt{x_n})^2$

3. $a + b + c + d \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da}$

4. Известно, что $9x^2 + 16y^2 + 144z^2 = 169$. Найдите максимальное значение выражения $6x - 8y + 24z$

5 (ВАЖНО). (Неравенство Седракяна)

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$$

6. $\frac{a_1^2}{a_1+a_2} + \frac{a_2^2}{a_2+a_3} + ... + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geq \frac{a_1+...+a_n}{2}$

7. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

8. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$

9. Известно, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Сдаём письменно

1. $a\sqrt{a^2 + c^2} + b\sqrt{b^2 + c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2$

2. $((a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + ... + (a_n + b_n)^2)(\frac{1}{a_1b_1} + \frac{1}{a_2b_2} + ... + \frac{1}{a_nb_n}) \geq 4n^2$