

Серия 14. Алгебраический разнбой

Региональные задачи

1. Рациональные числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$$

Докажите, что число $1 - ab$ является квадратом рационального числа. (2009-1)

2. Число x таково, что среди четырёх чисел $x - \sqrt{2}, x - \frac{1}{x}, x + \frac{1}{x}, x^2 + 2\sqrt{2}$ ровно одно не является целым. Найдите все такие x . (2014-5)

3. Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2, a^5 - b^5 \geq 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geq 2$. (2012-6)

4. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных. (2011-7)

5. Для каждого натурального n обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1 = 2, S_2 = 2 + 3 = 5, S_3 = 2 + 3 + 5 = 10, \dots$

Могут ли два подряд идущих члена последовательности (S_n) оказаться квадратами натуральных чисел? (2010-8)

Старое

6. Дана последовательность $a_n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$. Существуют ли пять идущих подряд её членов, кратных 2005?

7. Пусть p – простое число, $p > 2$. Докажите, что любой простой делитель числа $2^p - 1$ имеет вид $2kp + 1$.

8. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c$.

9. Числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что $(2 + a)(2 + b) \geq cd$

10. Докажите для положительных a, b, c, d неравенство $\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{abcd}$.