

Неравенство Йенсена, часть 2, краткие решения

группа 10-1

20.10.2016

1. (Весовое неравенство о средних) Докажите, для при любых положительных весах m_1, \dots, m_n для любого набора положительных чисел a_1, \dots, a_n выполнено неравенство:

$$\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \geq \sqrt[m_1 + \dots + m_n]{a_1^{m_1} \cdot a_2^{m_2} \cdot \dots \cdot a_n^{m_n}}.$$

Решение. Пусть $a_i = e^{b_i}$. Тогда неравенство из условия эквивалентно неравенству Йенсена для функции $f(x) = e^x$, точек b_i и весов $\lambda_i = m_i / \sum m_i$.

2. Для точки S внутри треугольника ABC обозначим x, y, z расстояния до прямых BC, CA, AB соответственно. Найдите точку S , в которой достигается минимум $\frac{BC}{x} + \frac{CA}{y} + \frac{AB}{z}$.

Решение. Пусть периметр треугольника равен 1. Применим неравенство Йенсена для функции $f(x) = 1/x$ и весов BC, CA, AB , получим

$$\frac{BC}{x} + \frac{CA}{y} + \frac{AB}{z} \leq \frac{1}{BC \cdot x + CA \cdot y + AB \cdot z} = \frac{1}{2S} = \frac{1}{r}.$$

Равенство достигается только при $x = y = z = r$, т. е. в центре вписанной окружности.

3. Докажите, что существует такое натуральное число N , что для любой последовательности вещественных чисел $1 = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_N > 0$ выполнено неравенство

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{N-1}^2}{x_N} \geq 3.999.$$

Решение 1. Пусть $x_i = 2^{-y_i}$. Тогда $0 = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_N$.

$$\begin{aligned} \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{N-1}^2}{x_N} &= 2^{y_1 - 2y_0} + 2^{y_2 - 2y_1} + \dots + 2^{y_N - 2y_{N-1}} = \\ &= 1 \cdot 2^{y_1 - 2y_0} + \frac{1}{2} \cdot 2^{y_2 - 2y_1 + 1} + \frac{1}{4} \cdot 2^{y_3 - 2y_2 + 2} + \dots + 2^{-N+1} \cdot 2^{y_N - 2y_{N-1} + (N-1)} \geq \dots \end{aligned}$$

К последней строчке применим Йенсена для $f(x) = 2^x$, точек $y_{s+1} - 2y_s + s$ и весов $2^{-s} / (2 - 2^{-N+1})$:

$$\begin{aligned} \dots &\geq (2 - 2^{-N+1}) \cdot 2^{(1 \cdot (y_1 - 2y_0) + 1/2 \cdot (y_2 - 2y_1 + 1) + 1/4 \cdot (y_3 - 2y_2 + 2) + \dots + 2^{-N+1} \cdot (y_N - 2y_{N-1} + (N-1))) / (2 - 2^{-N+1})} = \\ &= (2 - 2^{-N+1}) \cdot 2^{(-2y_0 + 2^{-N+1} y_N + \sum_{s=0}^{N-1} s 2^{-s}) / (2 - 2^{-N+1})} \geq (2 - 2^{-N+1}) \cdot 2^{(\sum_{s=0}^{N-1} s 2^{-s}) / (2 - 2^{-N+1})} = \\ &= (2 - 2^{-N+1}) \cdot 2^{(2 - (N+1)2^{-N+1}) / (2 - 2^{-N+1})} \rightarrow 4, N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В последней выкладке последовательно использовали $y_0 = 0, y_N \geq 0$, а затем просуммировали $\sum_{s=0}^{N-1} s 2^{-s} = 2 - (N+1)2^{-N+1}$ (суммируем тем же методом, что и в задаче 4 из листика про веса). Мы оценили снизу выражение из условия функцией от N , стремящейся к 4 при $N \rightarrow \infty$, и по определению предела искомое N существует.

Решение 2. Для всех натуральных N и вещественных $1 \geq x > 0$ определим $m(x, N)$ как точную нижнюю грань (т. е. \inf) множества значений выражения $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{N-1}^2}{x_N}$ по всем

последовательностям вида $x = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_N > 0$. Из соображений однородности ясно, что $m(x, N) = x \cdot m(1, N)$. Кроме того, $M(1, 1) = 1$. Имеем

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{N-1}^2}{x_N} = \frac{x_0^2}{x_1} + \left(\frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{N-1}^2}{x_N} \right) \geq \frac{x_0^2}{x_1} + m(x_1, N-1),$$

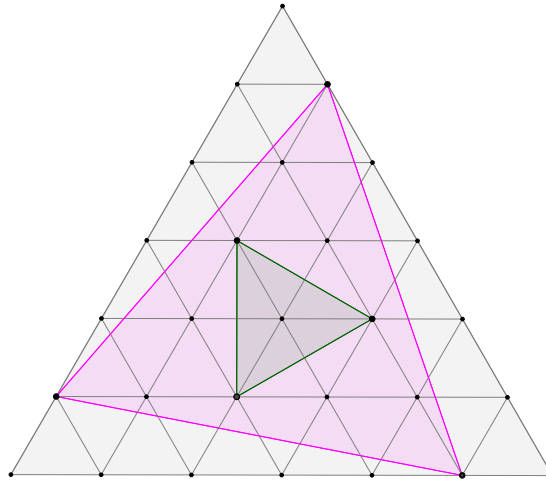
откуда мгновенно следует $m(1, N) \geq 1/x_1 + x_1 m(1, N-1) \geq 2\sqrt{m(1, N-1)}$. Числовая последовательность z_n , определённая $z_1 = 1$, $z_n = 2\sqrt{z_{n-1}}$, монотонно сходится к 4, а рекуррентное неравенство из предыдущего предложения влечёт $m(1, N) \geq z_N$. По определению сходимости $m(1, N) \geq 3.999$ с некоторого момента, что и требовалось доказать.

4. Докажите, что для любых положительных x, y, z выполнено неравенство

$$x^5 y + y^5 z + z^5 x \geq x^2 y^3 z + y^2 z^3 x + z^2 x^3 y.$$

Решение. Зафиксируем x, y, z и рассмотрим функцию $f(p, q, r) = x^p y^q z^r = e^{p \ln x + q \ln y + r \ln z}$. Для любых точек $A_1 = (p_1, q_1, r_1)$ и $A_2 = (p_2, q_2, r_2)$ и любых $\lambda + \mu = 1$, $\lambda, \mu \geq 0$ выполнено неравенство $\lambda f(A_1) + \mu f(A_2) \geq f(\lambda A_1 + \mu A_2)$, и это неравенство обеспечено выпуклостью функции e^x (куда подставили точки $p_1 \ln x + q_1 \ln y + r_1 \ln z$ и $p_2 \ln x + q_2 \ln y + r_2 \ln z$). Смысл этого неравенства заключается в том, что функция $f(p, q, r)$, зависящая от трёх переменных, выпукла (её график в \mathbb{R}^4 лежит под любой её хордой).

Необходимо доказать, что $f(5, 1, 0) + f(0, 5, 1) + f(1, 0, 5) \geq f(2, 3, 1) + f(1, 2, 3) + f(3, 1, 2)$. Нарисуем эти шесть точек (ясно, что они лежат в плоскости $x + y + z = 6$).



Из картинки видно, что точка $(2, 3, 1)$ лежит внутри выпуклой оболочки точек $(5, 1, 0)$, $(0, 5, 1)$, $(1, 0, 5)$, а значит она выражается как некоторая выпуклая комбинация этих точек: $(2, 3, 1) = \lambda(5, 1, 0) + \mu(0, 5, 1) + \nu(1, 0, 5)$. Выпуклость функции f позволяет нам написать неравенство Йенсена: $f(2, 3, 1) \leq \lambda f(5, 1, 0) + \mu f(0, 5, 1) + \nu f(1, 0, 5)$. Из соображений циклической симметрии выражений можно написать ещё два неравенства: $f(1, 2, 3) \leq \nu f(5, 1, 0) + \lambda f(0, 5, 1) + \mu f(1, 0, 5)$ и $f(2, 3, 1) \leq \mu f(5, 1, 0) + \nu f(0, 5, 1) + \lambda f(1, 0, 5)$. Сложим все три, получим требуемое.

Замечание: коэффициенты λ, μ, ν можно вычислить явно.