

Неравенства

9-11 класс

26.11.2016

Вспомним неравенства о средних.

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

1. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

2. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$ab + bc + ac \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$

3. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}.$$

4. Произведение положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n равно 1. Докажите, что

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

5. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq \frac{ab+bc+ac}{3}.$$

6. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

7. Положительные x, y, z таковы, что $x + y + z = xyz$. Найдите минимум $xy + yz + zx$.

8. Докажите, что выполнено неравенство:

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} < 12.$$

9. Даны вещественные $x_0 > x_1 > \dots > x_n$. Докажите, что

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq x_n + 2n.$$

10. Докажите, что для положительных a выполнено неравенство:

$$a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 16.$$

11. Докажите, что для положительных чисел a, b, c таких, что $a + b + c = 1$, выполнено неравенство

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}$$