

Теорема Пифагора и принцип Карно

Все задачи этого занятия будут так или иначе связаны с теоремой Пифагора или с теоремой, ей обратной. Сформулируйте обратную теорему. Как она доказывается? [Методом от противного]

Во многих задачах требуется доказать перпендикулярность каких-либо прямых. Иногда для этого хватает этой теоремы, в других случаях эта перпендикулярность «вылезает» из пересечения высот какого-то треугольника (этому было посвящено отдельное занятие). Сегодня мы рассмотрим еще один, достаточно «мощный» метод доказательства перпендикулярности.

Дана прямая, к которой из одной точки проведены две наклонные MA и MB (см. рис. 1а, б). Пусть длины этих наклонных равны a и b , а длины их проекций равны a' и b' .

1) Докажите, что $a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2$. 2) Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

[1] Рассмотрим точку N – ортогональную проекцию точки M на прямую AB . Применив теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам AMN и BMN , получим равенство, равносильное требуемому. 2) Если для точки K , лежащей на прямой AB , выполняется равенство: $a^2 - b^2 = KA^2 - KB^2$, то она является ортогональной проекцией точки M на AB .

Из равенства, данного в условии, и равенства, доказанного в пункте 1), следует, что $NA^2 - NB^2 = KA^2 - KB^2 \Leftrightarrow (NA - NB)(NA + NB) = (KA - KB)(KA + KB)$. Значит, если $N \in [AB]$, то $NA - NB = KA - KB$, а если $N \notin [AB]$, то $NA + NB = KA + KB$. В обоих случаях $N \equiv K$

Принцип замены разности квадратов наклонных на разность квадратов их проекций называется принципом Карно.

Эта фамилия вам наверняка знакома. Французский математик, механик, военный инженер, государственный деятель Лазарь Карно (1753 – 1823), ученик Гаспара Монжа (создателя начертательной геометрии), занимался, в том числе, и проблемами элементарной геометрии.

Полученный результат можно сформулировать на языке ГМТ.

Геометрическим местом точек M плоскости, для которых разность квадратов расстояний до двух данных точек A и B – постоянная величина, является прямая, перпендикулярная отрезку AB .

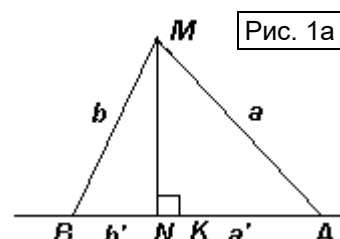


Рис. 1а

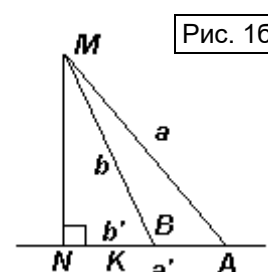


Рис. 1б

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b , его гипотенуза равна c , а высота, проведенная к гипотенузе, – h . Докажите, что треугольник со сторонами $a + b$, h и $c + h$ также является прямоугольным.
2. Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов их длин равна квадрату суммы длин оснований.
3. а) Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противоположных сторон.
б) Даны четыре палочки, из которых можно составить контур четырехугольника с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что из них также можно составить контур четырехугольника с двумя прямыми углами.
4. Даны два лоскута материи, имеющие форму квадратов (их размеры – различны). Каким образом их нужно раскроить, чтобы из всех получившихся кусков можно было сшить скатерть, также имеющую форму квадрата?
5. Дан треугольник ABC . Постройте отрезок, который разобьет его на два треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.

6. Докажите, что если четырехугольник с перпендикулярными диагоналями является описанным, то он является дельтоидом.
7. В шестиугольнике $ABCDEF$: углы A и C – прямые, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Докажите, что прямые DF и BE перпендикулярны.
8. Через вершины B и C треугольника ABC перпендикулярно прямой BC проведены прямые b и c соответственно. Серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB пересекают прямые b и c соответственно в точках P и Q . Докажите, что прямая PQ перпендикулярна медиане AM треугольника ABC .
9. H – ортоцентр равнобедренного треугольника ABC . На боковых сторонах AB и BC отмечены точки M и K соответственно так, что угол KMH – прямой. Докажите, что из отрезков AK , CM и MK можно составить прямоугольный треугольник.
10. Пусть M – середина хорды AB окружности с центром O . Точка K симметрична точке M относительно O , P – произвольная точка окружности. Перпендикуляр к прямой AB в точке A и перпендикуляр к прямой PK в точке P пересекаются в точке Q . Точка H – основание перпендикуляра, опущенного из P на AB . Докажите, что прямая QB делит отрезок PH пополам.