24.05.16

Комбинаторная геометрия

Заключительное занятие этого года будет опять посвящено комбинаторной геометрии. В него, в числе прочих, включены и несколько задач, которые были у вас на самом первом занятии по примерам и контрпримерам, но их никто не решил.

Есть надежда, что за год вы стали опытнее, получили какие-то навыки, и эти задачи будут решены.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дан четырёхугольник, в котором длина большей диагонали равна 10 см. Его разрезали на 4 треугольника: а) произвольных; б) равнобедренных. Могло ли случиться так, что у каждого треугольника самая длинная сторона также равна 10 см?

2. а) В пятиугольнике самая длинная диагональ равна 1. Его разрезали на 5 равных треугольников. Может ли оказаться так, что у каждого треугольника самая длинная сторона также равна 1? б) Барон Мюнхгаузен утверждает, что для любого указанного ему натурального числа N он сможет нарисовать многоугольник, который можно разрезать на N меньших равных выпуклых многоугольников того же диаметра. Могут ли слова барона быть правдой? (*Диаметр многоугольника – расстояние между двумя наиболее удаленными его точками.*)

3. На плоскости отмечено несколько точек (больше трех). Известно, что если стереть любую точку, то оставшиеся точки будут симметричны относительно какой-нибудь прямой. Верно ли, что все отмеченные точки симметричны относительно какой-нибудь прямой?

4. Каждый из двух равных четырехугольников разрезали на два треугольника. Среди получившихся треугольников нет равных. Могут ли все треугольники быть подобными?

5. Правильный многоугольник с нечетным количеством вершин разбит диагоналями на треугольники так, что вершинами любого треугольника являются вершины исходного многоугольника. Могло ли оказаться так, что среди получившихся треугольников нет остроугольных?

6. На плоскости отметили 7 точек, и провели всевозможные отрезки с концами в этих точках. Оказалось, что для каждого отрезка есть ему параллельный. Обязательно ли найдутся три точки, лежащие на одной прямой?

7. Можно ли отметить на плоскости 8 точек и провести: а) 8; б) 9 прямых (каждую – ровно через две отмеченные точки) так, чтобы по обе стороны от каждой прямой было одинаковое количество точек?

8. Существуют ли такие два выпуклых четырехугольника, что стороны каждого из них лежат на серединных перпендикулярах к сторонам другого?

9. На плоскости отметили 8 точек. Каждую пару точек соединили отрезком и к каждому такому отрезку построили серединный перпендикуляр. Могло ли оказаться так, что на каждом построенном перпендикуляре лежат ровно две отмеченные точки?

Ответы и решения разобранных на занятии задач.

3. Ответ: нет.

Первый способ. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом 36° при вершине B и проведем его биссектрису AD (см. рис. 3а). Она разбивает исходный треугольник на два равнобедренных (*счет углов*). Тогда любые три из четырех точек A, B, C и D удовлетворяют условию.

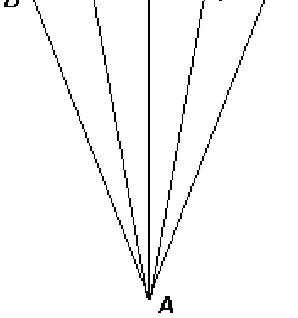
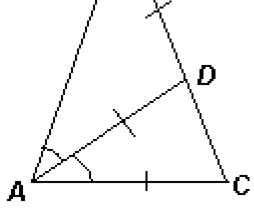
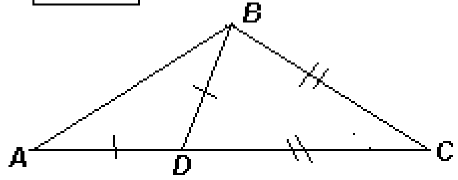


Рис. 3а



Второй способ. Рассмотрим равнобедренный треугольник *ABC* с углом 108° при вершине *B* и на стороне *AC* отметим точку *D* так, чтобы *CD* = *CB* (см. рис. 3б). Тогда *AD* = *BD* (*счет углов*), поэтому любые три из четырех точек *A*, *B*, *C* и *D* удовлетворяют условию.

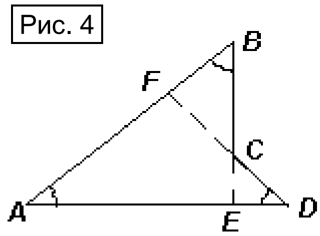
Рис. 3б



4. Ответ: могут.

Рассмотрим, например, невыпуклый четырехугольник *ABCD*, в котором нет равных сторон, острые углы *B* и *D* равны, а противолежащие стороны попарно перпендикулярны (см. рис. 4).

Рис. 4



Такой четырехугольник несложно построить, если в остроугольном треугольнике ABD провести высоты BE и DF, которые пересекутся в точке C.

Если его разрезать по прямой *BC*, то получим треугольники *ABE* и *DCE*, а если разрезать по прямой *DC* – то треугольники *ADF* и *BCF*. Эти четыре прямоугольных треугольника подобны, так как у них равны соответствующие острые углы. Равных среди них нет, так как их гипотенузы попарно различны.

В частности, если углы A, B и D равны по 45°, то каждый из получающихся треугольников является прямоугольным и равнобедренным.

5. Ответ: нет.

Рассмотрим окружность, описанную около данного многоугольника. Она является описанной и для каждого треугольника разбиения. Центр этой окружности не может лежать на диагонали многоугольника (в силу нечетного количества вершин), значит, ое лежит внутри одного из треугольников. Следовательно, этот треугольник является остроугольным.

Рис. 5а