

### Геометрическое место точек

На этом и на следующем занятии мы займемся задачами на поиск геометрических мест точек (ГМТ), обладающих теми или иными свойствами. Для начала вспомним что такое ГМТ.

**Определение.** ГМТ, обладающих заданным свойством, – это фигура, состоящая из тех и только тех точек, для которых это свойство выполняется.

Поэтому, найдя искомое ГМТ – фигуру  $F$ , надо доказать два взаимно обратных утверждения:

А) Любая точка, принадлежащая  $F$ , обладает указанным свойством.

Б) Любая точка, обладающая указанным свойством, принадлежит  $F$ .

Почему вместо Б) можно доказывать, что любая точка, не принадлежащая  $F$ , указанным свойством не обладает (*что иногда бывает удобнее*)?

[Метод «от противного, основанный на том, что  $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \text{не } B \Rightarrow \text{не } A$ ]

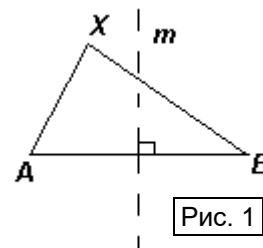
#### Простейшие ГМТ на плоскости.

- 1) ГМТ, находящихся на данном расстоянии от данной точки;
- 2) ГМТ, равноудаленных от двух данных точек;
- 3) ГМТ, находящихся на данном расстоянии от данной прямой;
- 4) ГМТ, равноудаленных от двух данных прямых (*два случая*);
- 5) ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом;
- 6) ГМТ, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна.

При решении задач желательно научиться грамотно использовать уже известные ГМТ, рационально проводить рассуждения, а также делать правильные выводы из того, какая величина получается фиксированной. Рассмотрим это на двух простых примерах.

**Пример 1.** Дан отрезок  $AB$ . Найдите ГМТ  $X$  таких, что:  $\angle XAB > \angle XBA$ .

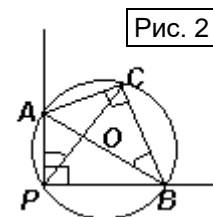
**Решение.** Заданное свойство равносильно тому, что в треугольнике  $XAB$   $XB > XA$ . Тогда, учитывая 2), **искомым ГМТ является полуплоскость с границей  $m$ , в которой лежит точка  $A$ , не включающая границу и точки прямой  $AB$**  (см. рис. 1).



**Пример 2.** Вершины  $A$  и  $B$  прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) скользят по сторонам прямого угла. По какой траектории движутся: а) середина  $AB$ ; б) вершина  $C$ ?

**Решение.** Пусть  $P$  – вершина данного прямого угла,  $O$  – середина  $AB$  (см. рис. 2). Тогда: а)  $PO = \frac{1}{2}AB$  – постоянная величина, значит,

**точка  $O$  движется по окружности**; б) четырехугольник  $ACBP$  – вписанный, следовательно,  $\angle APC = \angle ABC$ , который фиксирован. Следовательно, **точка  $C$  движется по прямой**.



Если бы речь шла о поиске ГМТ, то ГМТ  $O$  – четверть окружности с центром  $P$  и радиусом  $\frac{1}{2}AB$ , лежащая внутри угла  $P$ , а ГМТ  $C$  – отрезок указанной прямой, лежащий внутри угла  $P$  и  $PA \leq PC \leq PB$ .

#### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Окружность радиуса  $R$  катится по прямой. По какой траектории движется ее центр?
2. Дан прямоугольник  $ABCD$ . Найдите ГМТ  $M$  таких, что  $AM + BM \leq CM + DM$ .
3. Пусть  $O$  – центр равностороннего треугольника  $ABC$ . Найдите ГМТ  $M$ , удовлетворяющих следующему условию: любая прямая, проведенная через точку  $M$ , пересекает хотя бы один из двух отрезков:  $AB$  или  $CO$ .
4.  $A$  и  $B$  – фиксированные точки на плоскости. Найдите ГМТ  $M$ , для которых  $A$ ,  $B$  и  $M$  являются вершинами равнобедренного треугольника.

5. Даны две перпендикулярные прямые и отмечена точка  $M$ , не принадлежащая им. По одной прямой движется точка  $P$ , а по другой – точка  $Q$  так, что угол  $PMQ$  всегда остается прямым. Найдите геометрическое место точек, симметричных  $M$  относительно прямой  $PQ$ .
6. Даны две перпендикулярные прямые и точка  $C$ , не принадлежащая ни одной из них. Рассмотрим все прямоугольники  $CDME$  такие, что вершина  $D$  лежит на одной из данных прямых, а вершина  $E$  – на другой. Найдите геометрическое место точек  $M$ .
7. Точки  $P$  и  $Q$  движутся с одинаковой постоянной скоростью  $v$  по двум прямым, пересекающимся в точке  $O$ . Докажите, что на плоскости существует точка  $A$ , расстояния от которой до точек  $P$  и  $Q$  в любой момент времени равны.
8. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ). На стороне  $AB$  выбирается точка  $K$ , а на стороне  $BC$  – точка  $L$  так, что  $AK + CL = \frac{1}{2} AB$ . Найдите геометрическое место середин отрезков  $KL$ .
9. На биссектрисе данного угла фиксирована точка. Рассматриваются всевозможные равнобедренные треугольники, у которых вершина находится в этой точке, а концы оснований лежат на разных сторонах этого угла. Найдите геометрическое место середин оснований таких треугольников.