## Задачи на наименьшее и наибольшее значения

Продолжим заниматься экстремальными задачами. На этом занятии вам встретятся задачи, в которых потребуется определять как наименьшее, так и наибольшее значение в различных геометрических конструкциях, причем не только связанные с расстояниями.

**Пример**. Из точки $M$ описанной окружности треугольника $ABC$ опущены перпендикуляры $MP$ и $MQ$ на прямые $AB$ и $AC$. При каком положении точки $M$ длина $PQ$ – наибольшая?

**Решение**. Так как $\angle APM = \angle AQM = 90°$, то точки $A$, $M$, $P$ и $Q$ лежат на одной окружности с диаметром $AM$ (см. рис. 1). По следствию из теоремы синусов $PQ = AM \cdot \sin\angle BAC$. Так как угол $BAC$ – фиксирован, то наибольшее значение $PQ$ достигается при наибольшем значении $AM$, то есть в случае, когда $AM$ – диаметр данной окружности.

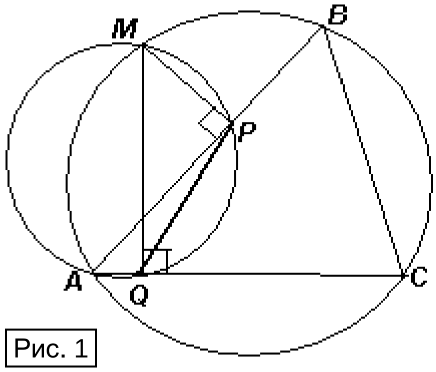

Рис. 1

**Ответ**: $M$ – точка, диаметрально противоположная точке $A$.

### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

**1.** Какое наименьшее значение может принимать периметр неравнобедренного треугольника с целыми длинами сторон?

**2.** Какой из треугольников с данной стороной и данной высотой, проведенной к этой стороне, имеет наименьший периметр?

**3.** В треугольнике $ABC$: $AB = BC = 1$, $\angle ABC = 15°$. На сторонах $AB$ и $BC$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно. Найдите наименьшее значение длины ломаной $AED$.

**4.** В треугольнике $ABC$: $AB = BC = 1$, $\angle ABC = 20°$. На сторонах $AB$ и $BC$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно. Найдите наименьшее значение длины ломаной $AEDC$.

**5.** На гипотенузе $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$ выбрана произвольная точка $M$ и из нее опущены перпендикуляры $MK$ и $MP$ на катеты этого треугольника. При каком положении точки $M$ длина отрезка $PK$ будет наименьшей?

**6.** Дан треугольник $ABC$. Найдите на прямой $AB$ такую точку $M$, для которой сумма радиусов описанных окружностей треугольников $ACM$ и $BCM$ будет наименьшей.

**7.** Дан треугольник $ABC$. Через вершину $B$ проведите прямую так, чтобы сумма расстояний до нее от вершин $A$ и $C$ была наибольшей.

**8.** Внутри окружности с центром $O$ дана точка $A$. а) Через точку $A$ проведите хорды наибольшей и наименьшей длины. б) Найдите на окружности точку $M$, для которой угол $OMA$ – наибольший.

**9.** На одной из сторон острого угла $XOY$ отмечены точки $A$ и $B$. а) Укажите на другой стороне угла точку $C$, из которой отрезок $AB$ виден под наибольшим углом. б) Объясните, как построить эту точку.

**10.** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ во внешнюю сторону построен квадрат с центром $O$. Точки $M$ и $N$ – середины сторон $AC$ и $BC$ соответственно, а длины этих сторон равны соответственно $b$ и $a$. Найдите наибольшее значение суммы $OM + ON$, если угол $ACB$ является переменной величиной.