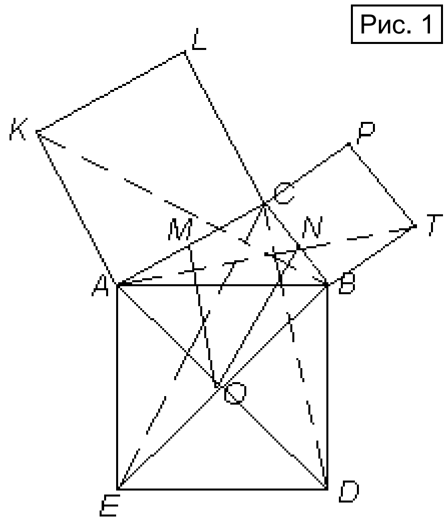
Вспомогательные квадраты

На прошлом занятии мы рассматривали задачи, в которых, как правило, квадрат был вписан в квадрат (либо изначально, либо делалось соответствующее дополнительное построение). Сегодня также речь пойдет о квадратах, но расположены они будут по отношению друг к другу более «хитрым» образом. Тем не менее, и в таких задачах на помощь часто приходит построение вспомогательного квадрата. Рассмотрим два примера. Одна из задач была у вас на одном из предыдущих занятий, но ее никто не решил. Ее придумал замечательный геометр Игорь Федорович Шарыгин.

Пример 1. На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром O. Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно, а длины этих сторон равны соответственно b и a. Найдите наибольшее значение суммы $OM + ON$, если угол ACB является переменной величиной.

Рис. 1



Решение. Пусть $ABDE$ – квадрат, построенный на стороне AB, тогда OM – средняя линия треугольника ADC, ON – средняя линия треугольника BEC (см. рис. 1). На отрезках AC и BC во внешнюю сторону построим квадраты $AKLC$ и $BTPC$. Проведем отрезки BK и AT, тогда $\Delta ABT = \Delta DBC$ и $\Delta BAK = \Delta EAC$ (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $DC = AT$ и $EC = BK$.

Так как $AT \le AC + CT$, где AC и CT имеют фиксированные длины, то наибольшее значение длины AT достигается, если точки T лежит на луче AC. Аналогично, длина BK – наибольшая, если точка K лежит на луче BC. Для выполнения этих условий необходимо и достаточно, чтобы $\angle ACB = 135°$. В этом случае:

$$OM + ON = \frac{1}{2}(AT + BK) = \frac{1}{2}\left(b + a\sqrt{2} + a + b\sqrt{2}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

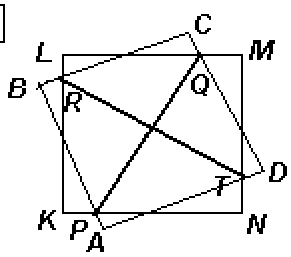
Ответ: $\frac{1+\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

Использованные равенства двух пар треугольников можно доказать иначе, используя повороты плоскости на угол 90° вокруг точек B и A соответственно.

Другую задачу, которую мы обсудим, придумал Вячеслав Викторович Произволов.

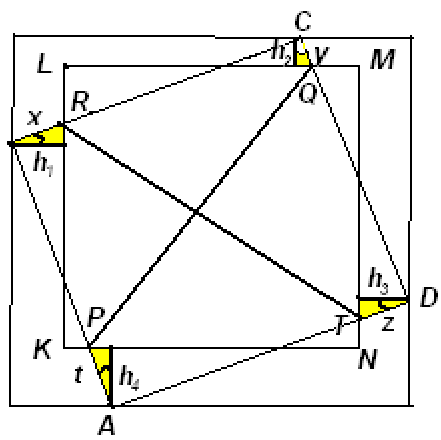
Пример 2. Квадраты $ABCD$ и $KLMN$ расположены так, что в пересечении образуется восьмиугольник (см. рис. 2а). Докажите, что диагонали PQ и RT этого восьмиугольника равны и перпендикулярны.

Рис. 2а



Решение. Через вершины квадрата $ABCD$ проведем прямые, соответственно параллельные сторонам квадрата $KLMN$ (см. рис. 2б). По уже доказанному, образовавшийся прямоугольник является квадратом. Введем обозначения: $AP = t$, $BR = x$, $CQ = y$ и $DT = z$. Из вершин квадрата $ABCD$ проведем перпендикуляры h_1, h_2, h_3 и h_4 к ближайшим сторонам квадрата $KLMN$. Тогда $h_1 + h_3 = h_2 + h_4$ (каждая сумма равна разности сторон двух квадратов: вспомогательного и $KLMN$).

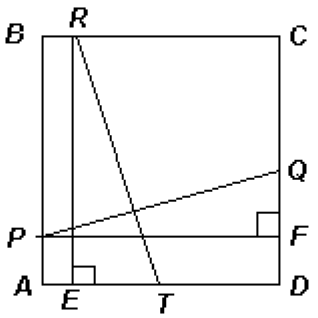
Рис. 2б



Заметим, что углы, отмеченные в желтых треугольниках, равны между собой, так как их соответствующие стороны попарно параллельны или перпендикулярны. Тогда, разделив почленно все слагаемые полученного равенства на косинус этого угла, получим: $x + z = y + t$.

Следовательно, равны проекции *FQ* и *ET* отрезков *PQ* и *RT* на соседние стороны квадрата *ABCD* (см. рис. 2в). Значит, равны прямоугольные треугольники *QPF* и *TRE* (по двум катетам). Из равенства этих треугольников следует как равенство их гипотенуз, так и равенство соответствующих острых углов, что обеспечивает перпендикулярность *PQ* и *RT*.

Рис. 2в



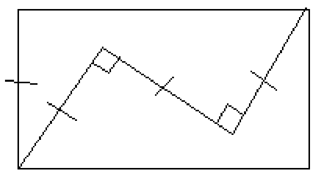
На прошлом занятии вы уже доказывали, что из перпендикулярности таких отрезков следует их равенство, но обратное утверждение неверно.

Полезно также отметить, что четыре треугольника, в которых были проведены высоты, подобны (равенство соответствующих углов).

Большинство задач, которые вам будут предложены, предлагалось на различных олимпиадах, но для вас они должны оказаться сравнительно несложными, так как основные идеи мы уже обсудили. Кроме уже названных авторов, используются задачи, придуманные Е. Бакаевым, Н. Стрелковой и Л. Штейнгарцем. Те из вас, кто были на устной олимпиаде по геометрии, могут пропустить задачу 1 (если вы ее решили).

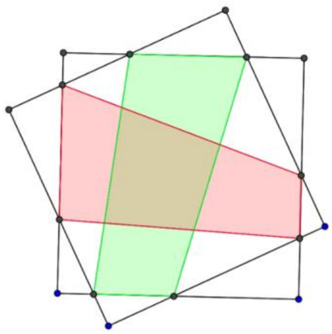
Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Внутри прямоугольника проведена ломаная, звенья которой равны меньшей стороне прямоугольника, а соседние звенья перпендикулярны (см. рисунок). Найдите отношение сторон прямоугольника.



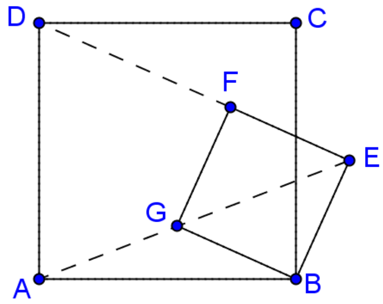
2. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами *a* и *b* построены квадраты, лежащие вне треугольника. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах квадратов.

3. На квадратном столе лежит квадратная скатерть так, что ни один угол стола не закрыт, но с каждой стороны стола свисает треугольный кусок скатерти. Известно, что какие-то два соседних куска равны. Докажите, что и два других куска также равны.



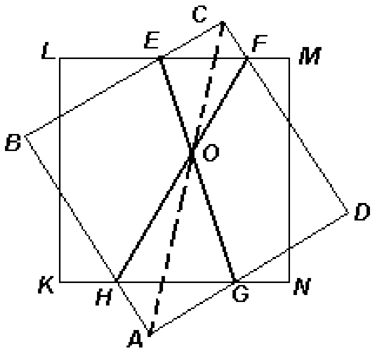
4. Два квадрата расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что площади закрашенных четырехугольников равны.

5. Квадраты *ABCD* и *BEFG* расположены так, как показано на рисунке. Оказалось, что точки *A*, *G* и *E* лежат на одной прямой. Докажите, что тогда точки *D*, *F* и *E* также лежат на одной прямой.



6. Равные квадраты *ABCD* и *KLMN* расположены так, что в пересечении образуется восьмиугольник (см. рисунок). Диагонали *EG* и *FH* этого восьмиугольника пересекаются в точке *O*. а) Найдите угол между прямыми *EG* и *FH*. б) Докажите, что точка *O* лежит на отрезке *AC*.

7. На сторонах параллелограмма внешним образом построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны и перпендикулярны.



8. На сторонах *AB* и *AC* треугольника *ABC* во внешнюю сторону построены квадраты *ABDE* и *ACFG*. Докажите, что прямые *BF* и *CD* пересекаются на высоте треугольника *ABC*.

9. Постиран квадратный платок площади 1 *м*^{2}. Для просушки его вешают на веревку так, чтобы центр платка был на веревке. За час успевают высохнуть только те части платка, которые не перекрывают друг друга. Какова наибольшая суммарная площадь этих частей?