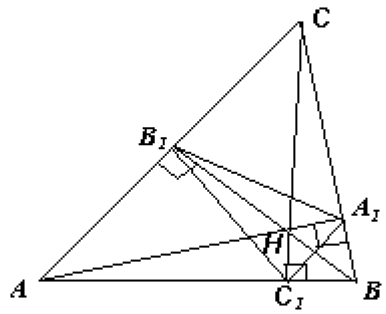
20.10.15

Вспомогательные окружности

Многие геометрические конфигурации устроены так, что в условии окружностей нет, но мы сами находим точки, лежащие на одной окружности, и используем эту окружность для решения задачи.



Пример. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1, которые пересекаются в точке H (см. рис.).

А) Найдите на чертеже пять острых углов, равных между собой, и обоснуйте.

Ответ: например, $\angle CA_1B_1 = \angle CAB = \angle CHB_1 = \angle BHC_1 = \angle BA_1C_1$.

Решение. 1) Точки A, A_1, B_1 и B лежат на окружности с диаметром AB (*провести*). Тогда $\boldsymbol{\angle CA_1B_1} =$ 90° – $\angle AA_1B_1$ = 90° – $\angle B_1BA$ **=** $\boldsymbol{\angle CAB}$.

2) Точки C, A_1, B_1 и H лежат на окружности с диаметром CH (*провести*). Тогда $\boldsymbol{\angle CA_1B_1 = \angle CHB_1}$.

В любом из этих пунктов можно также использовать, что прямая CH содержит высоту CC_1 и рассмотреть прямоугольные треугольники CHB_1 и CAC_1 с соответственно равными углами.

3) $\boldsymbol{\angle CHB_1 = \angle BHC_1}$ (вертикальные), $\boldsymbol{\angle BHC_1} = \boldsymbol{\angle BA_1C_1}$ (точки B, H, A_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BH) или $\boldsymbol{\angle BA_1C_1 = \angle CAB}$ (аналогично п. 1).

Обратите внимание, что попутно доказан следующий полезный факт: ***отрезки, соединяющие основания высот треугольника, антипараллельны противолежащим сторонам*** *(по отношению к прямым, содержащим две другие стороны).*

Б) Докажите, что точка H – центр окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$.

Решение. Из доказанного в пункте А), в частности, следует, что ***прямые, содержащие высоты треугольника ABC содержат биссектрисы треугольника*** $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$.

В) Докажите, что точка C лежит ***вне*** окружности с диаметром AB, а точка H – ***внутри*** этой окружности.

Решение. Используем следующее утверждение*:* ***угол AMB, где AB – диаметр окружности,: а) является острым т. и т. т., когда M лежит вне окружности; б) является тупым т. и т. т., когда M лежит внутри окружности***.

Задачи для самостоятельного решения

1. Общая гипотенуза AB прямоугольных треугольников ABC и ABD имеет длину 5 см. Найдите наибольшее возможное расстояние между точками C и D.

2. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной a. Точка D находится от точки A на расстоянии a. Какие значения может принимать величина угла BDC?

3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O. Докажите, что CO – биссектриса прямого угла.

4. В треугольнике ABC: $\angle C = 70°$, $\angle B = 80°$. Внутри треугольника выбрана такая точка M, что треугольник CMB – равносторонний. Найдите углы MAB и MAC.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle A = 60°$, $\angle B = 150°$, $\angle C = 45°$ и $AB = BC$. Докажите, что треугольник ABD – равносторонний.

6. Докажите, что медиана, проведенная из вершины тупого угла треугольника меньше половины стороны, к которой она проведена, а медиана, проведенная из вершины острого угла, – больше половины стороны, к которой проведена.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C – тупые. Сравните длины диагоналей AC и BD.

8. Дан квадрат $ABCD$. Луч AE пересекает сторону BC, причем $\angle BAE = 30°$, а $\angle BCE = 75°$. Найдите $\angle CBE$.

9. Равносторонние треугольники ABC и DFE расположены на плоскости так, что вершина B лежит внутри отрезка DE, а вершина F – внутри отрезка AC. Определите вид четырехугольника, вершинами которого являются точки A, C, D и E.

10. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle ABD = \angle CDB = 60°$, $\angle BCA = \angle CAD = 30°$. Найдите BD, если $AB = 2$ см.

11. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. Вне его построены равнобедренные тупоугольные треугольники AB_1C и BA_1C с одинаковыми углами α при их основаниях AC и BC. Перпендикуляр, проведенный из вершины C к отрезку A_1B_1 пересекает серединный перпендикуляр к стороне AB в точке C_1. Найдите угол AC_1B.