

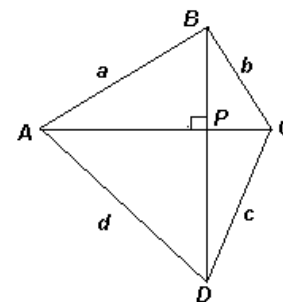
Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями

Напомню, что на прошлом занятии в процессе решения задач было доказано следующее утверждение: **диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противоположных сторон.**

То есть $AC \perp BD \Leftrightarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ (см. рисунок).

Это утверждение верно как для выпуклого, так и для невыпуклого четырехугольника, но сегодня мы будем рассматривать только выпуклые четырехугольники, так как, помимо перпендикулярности диагоналей, они будут еще и вписанными.

В связи с появлением окружности, вам потребуется также вспомнить: 1) теорему о вписанном угле; 2) необходимое и достаточное условие того, чтобы четырехугольник был вписанным; 3) теорему об угле между касательной и хордой.



Упражнения и задачи для самостоятельного решения

- Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналям вписан в окружность с центром O , то $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.
- Докажите, что во вписанном четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями расстояние от центра описанной окружности до стороны равно половине противоположной стороны.
- Через вершины вписанного четырехугольника проведены касательные к его описанной окружности. Докажите, что точки их попарного пересечения являются вершинами вписанного четырехугольника тогда и только тогда, когда диагонали исходного четырехугольника взаимно перпендикулярны.
- Докажите, что во вписанном четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями прямая, проведенная из точки пересечения диагоналей перпендикулярно стороне делит противоположную сторону пополам.
- Четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналям вписан в окружность с центром O и радиусом R . а) Докажите, что $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4R^2$. б) Найдите сумму квадратов сторон четырехугольника $ABCD$.
- Прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность, M – произвольная точка этой окружности (не совпадающая с вершинами). Докажите, что из отрезков MA , MB , MC и MD можно составить контур четырехугольника с перпендикулярными диагоналями, вписанного в ту же окружность.
- Докажите, что диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда: а) середины его сторон лежат на одной окружности; б) основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения его диагоналей на стороны, лежат на одной окружности.
- Докажите, что если четырехугольник с перпендикулярными диагоналями является вписанным, то окружности, указанные в задачах 7а и 7б, совпадают.
- Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, P – точка их пересечения. Докажите, что: а) четырехугольник, образованный проекциями P на стороны данного четырехугольника, является описанным около окружности с центром P ; б) стороны этого четырехугольника соответственно параллельны сторонам четырехугольника, образованного попарным пересечением касательных в вершинах данного четырехугольника (см. задачу 3).
- а) Пусть проекции некоторой точки T на стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на одной окружности. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT , BT , CT и DT относительно биссектрис соответствующих углов, пересекаются в одной точке.
б) На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C' и B' соответственно так, что $BB' \perp CC'$. Точка X внутри треугольника такова, что $\angle XBC = \angle B'BA$, $\angle XCB = \angle C'CA$. Докажите, что $\angle B'XC' = 90^\circ - \angle A$.