

Вписанные углы и углы между касательной и хордой

В процессе решения задач мы уже сталкивались с углами, вписанными в окружность. Сегодня мы займемся ими вплотную. Вспомним (сделав соответствующие рисунки):

- 1) определения вписанного и центрального углов;
- 2) теорему о вписанном угле (два случая);
- 3) теорему об угле между касательной и хордой и теорему, ей обратную;
- 4) необходимые и достаточные условия того, чтобы 4 точки лежали на одной окружности (три эквивалентные формулировки).
- 5) что такое антипараллельность.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что если биссектрисы углов выпуклого четырёхугольника при пересечении образуют четырёхугольник, то он – вписанный.
2. Диагонали равнобокой трапеции $ABCD$ с боковой стороной AB пересекаются в точке P . Докажите, что центр O её описанной окружности лежит на описанной окружности треугольника APB .
3. Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Окружность, проходящая через точки A , O и B касается прямой BC . Докажите, что окружность, проходящая через точки B , O и C касается прямой CD .
4. К двум окружностям, пересекающимся в точках K и M , проведена общая касательная. Докажите, что если A и B – точки касания, то $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$.
5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$: $AB = BC = CD$, M – точка пересечения диагоналей, K – точка пересечения биссектрис углов A и D . Докажите, что точки A , M , K и D лежат на одной окружности.
6. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Точка M – середина BC . Докажите, что: а) касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC параллельна прямой B_1C_1 ; б) прямые MB_1 и MC_1 касаются описанной окружности треугольника AB_1C_1 .
7. Две прямые, касающиеся данной окружности в точках A и B , пересекаются в точке C . Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , лежит на данной окружности.
8. Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне AB взята точка K , на стороне CD – точка L , на отрезке KL – точка M . Докажите, что вторая (отличная от M) точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AKM и MLC , лежит на диагонали AC .
9. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC выбраны точки C_0 , A_0 и B_0 соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников AB_0C_0 , BC_0A_0 и CA_0B_0 проходят через одну и ту же точку.
10. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота из вершины A и биссектрисы из двух других вершин. Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного этими тремя прямыми, касается биссектрисы, проведенной из вершины A .
11. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H . Прямая CH пересекает полуокружность с диаметром AB , проходящую через точки A_1 и B_1 , в точке D . Отрезки AD и BB_1 пересекаются в точке M , BD и AA_1 – в точке N . Докажите, что описанные окружности треугольников B_1DM и A_1DN касаются.