

Вневписанная окружность_2

Напомним, что **вневписанной окружностью треугольника** называется **окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон**. На предыдущем занятии мы рассмотрели ее основные свойства и вы решили несколько задач. Задачи этого занятия отличаются тем, что в их условиях нет упоминания о вневписанных окружностях, но такие окружности выступают в качестве вспомогательной величины. Рассмотрим «классический» пример.

Пример 1. В треугольнике ABC с углом B , равным 120° , проведены биссектрисы AA_1 , BB_1 и CC_1 . Найдите угол $A_1B_1C_1$.

Ответ: 90° .

Решение.

На продолжении стороны AB (за точку B) отметим точку D , тогда $\angle DBC = 60^\circ$, то есть луч BC – биссектриса угла DBB_1 (см. рис.

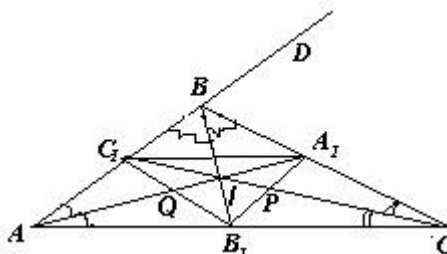


Рис. 1

1).

Так как AA_1 – биссектриса угла BAC , то A_1 – центр окружности, касающейся BB_1 , BD и B_1C . Такая окружность является

вневписанной для треугольника ABB_1 , поэтому, B_1A_1 – биссектриса угла BB_1C . Аналогично, C_1 – центр вневписанной окружности для треугольника CBB_1 , поэтому, B_1C_1 – биссектриса угла BB_1A . Следовательно, $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$.

Отметим, что справедливо и обратное утверждение: если треугольник $A_1B_1C_1$ – прямоугольный с прямым углом B_1 , то $\angle ABC = 120^\circ$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. В условиях примера 1 докажите, что: а) $\angle B_1C_1C = \angle B_1A_1A = 30^\circ$; б) точки A_1 , C_1 , Q и P лежат на одной окружности (Q и P – точки пересечения прямых AA_1 и CC_1 со сторонами треугольника $A_1B_1C_1$); в) точки B , A_1 , P и I (а также точки B , C_1 , Q и I) лежат на одной окружности (I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC).

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE . Оказалось, что DE – биссектриса треугольника ADC . Найдите угол BAC .

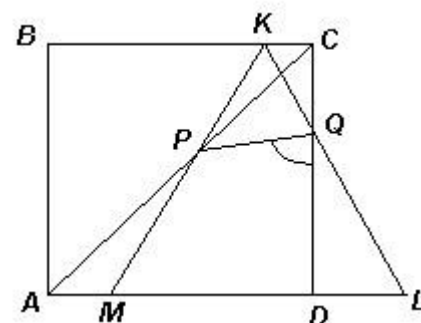
3. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна меньшему основанию BC , а диагональ AC равна основанию AD . Прямая, проходящая через вершину B параллельно AC , пересекает прямую DC в точке M . Докажите, что AM – биссектриса угла BAC .

4. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. На стороне BC взята точка M , а на стороне CD – точка K так, что периметр треугольника MCK равен 2. Найдите: а) расстояние от вершины A до прямой MK ; б) угол MAK .

5. Квадрат $ABCD$ и равносторонний треугольник MKL расположены так, как это показано на рисунке. Найдите угол PQD .

6. Точка E на стороне AD квадрата $ABCD$ такова, что $\angle AEB = 60^\circ$. Биссектриса угла ABE , отразившись от стороны AD , пересекает отрезок BE в точке F . Докажите, что точка F лежит на диагонали квадрата.

7. На полосу наложили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, так, что его граница пересекает границы полосы в четырех точках. Докажите, что две прямые, проходящие крест-накрест через эти точки, пересекаются под углом 45° .



8. Углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны 15° и 30° . Какой угол образует с этой стороной проведенная к ней медиана?
9. Биссектрисы углов A и B выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , а биссектрисы углов C и D пересекаются в точке Q (точки Q и P различны). Прямая PQ проходит через середину стороны AB . Чему может быть равен угол DAB , если $\angle ABC = a$?