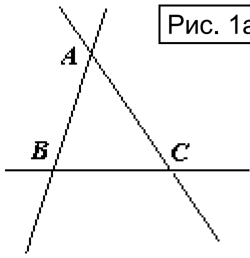
Вневписанная окружность_1

Пусть на плоскости заданы три прямые, которые попарно пересекаются в точках *A*, *B* и *C* (см. рис. 1а).

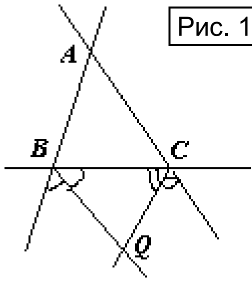
Рис. 1а



Сколько существует точек, равноудаленных от этих прямых?

Рассмотрим, например, биссектрисы внешних углов *B* и *C* треугольника *ABC* (см. рис. 1б). Так как сумма углов, образованных ими со стороной *BC*, меньше, чем 180°, то эти биссектрисы пересекутся в некоторой точке *Q*. Тогда точка *Q* равноудалена от прямых *AB*, *AC* и *BC*. Аналогично, рассматривая другие пары внешних углов треугольника *ABC*, получим еще две точки, обладающие требуемым свойством.

Рис. 1б



Таким образом, помимо центра окружности, вписанной в треугольник *ABC*, существуют, по крайней мере, ***еще три точки***, равноудаленные от заданных прямых. Каждая из этих точек является центром ***окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон***. Такие ***окружности называют вневписанными*** для данного треугольника *ABC*.

Упражнения. 1) Докажите, что других точек, равноудаленных от прямых *AB*, *AC* и *BC*, не существует (то есть их ровно четыре).

[Достаточно рассмотреть части плоскости, ограниченные углами, вертикальными углам треугольника. В них не может быть точек, равноудаленных от трех прямых]

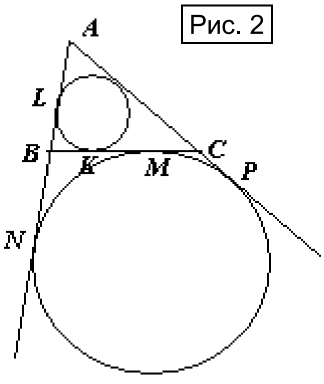
2) Докажите, что точка *Q* лежит на биссектрисе угла *BAC* (см. рис. 1б).

[Точка *Q* равноудалена от прямых *AB* и *AC*]

3) Вычислите угол *BQC*, если $\angle BAC = \alpha$.

[$\angle BQC = 90° - 0{,}5\alpha$]

Рис. 2



Базовая задача. Окружность касается стороны *BC* треугольника *ABC* в точке *M*, а продолжений сторон *AB* и *AC* – в точках *N* и *P* соответственно (см. рис.2). Вписанная в этот треугольник окружность касается стороны *BC* в точке *K*, а стороны *AB* – в точке *L*. Докажите, что:

1) $BK = p - b$, где *p* – полупериметр треугольника *ABC*, *b* – длина стороны *AC*; 2) $AN = p$.

[Из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, получим: $AN = AL$, $BK = BL$ и $CN = CK$. Сумма этих шести отрезков составляет периметр треугольника *ABC*, поэтому, $AN + BK + CN = p$. Учитывая, что $AN + CN = b$, получаем равенство 1. Применяя эту же теорему об отрезках касательных к другой окружности, получим: $AP = AT$, $BM = BP$ и $CM = CT$. Тогда $P_{ABC} = AB + AC + BC = AB + AC + BM + CM = AB + AC + BP + CT = AP + AT = 2AP$, откуда и следует утверждение 2.]

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. Докажите, что: а) отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой касания вневписанной окружности и противолежащей стороны делит периметр треугольника пополам; б) точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны.

2. Объясните, как построить треугольник *ABC*, зная положение трех точек A_1, B_1 и C_1, являющихся центрами вневписанных окружностей треугольника *ABC*.

3. Продолжение биссектрисы угла *A* треугольника *ABC* пересекает описанную около него окружность в точке *M*; *I* – центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*; *Q* – центр вневписанной окружности, касающейся стороны *BC*. Докажите, что точки *B*, *C*, *I* и *Q* лежат на окружности с центром *M*.

4. Докажите, что радиус одной из вневписанных окружностей равен полупериметру треугольника тогда и только тогда, когда этот треугольник – прямоугольный.

5. а) Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.
б) Отрезок, отличный от диагонали, разбивает квадрат на два многоугольника, в каждый из которых вписана окружность. Найдите длину отрезка, если радиусы окружностей равны R и r ($R > r$).
6. Существует ли треугольник, у которого радиус одной из вневписанных окружностей равен радиусу описанной окружности?
7. Даны угол и точка, лежащая между его сторонами. Объясните, как построить прямую, проходящую через данную точку так, чтобы она отсекала от данного угла треугольник с заданным периметром.
8. Объясните, как построить треугольник по углу, высоте, проведенной из вершины этого угла, и периметру.
9. Дан треугольник ABC. На лучах AB и AC (вне треугольника) построены точки A_1 и A_2 соответственно так, что $BA_1 = CA_2 = BC$. A_0 – точка пересечения отрезков BA_2 и CA_1. Докажите, что прямая, проходящая через A_0 перпендикулярно прямой BC, содержит центр вневписанной окружности треугольника ABC.
10. $ABCD$ – параллелограмм. Вневписанные окружности треугольников ABC и ACD касаются сторон BC и CD соответственно. Докажите, что точки их касания с прямой AC совпадают.
11. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AD и AB в точках M и N. Докажите, что точки пересечения отрезка MN со сторонами BC и CD лежат на вписанной окружности треугольника BCD.
12. Объясните, как построить четырехугольник $ABCD$ по двум сторонам AB и AD и двум углам B и D, если известно, что в него можно вписать окружность.