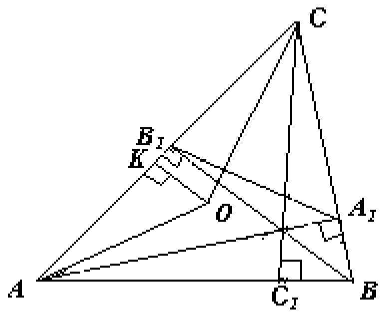
22.12.15

Угол между радиусом описанной окружности и стороной треугольника



Сформулируем и докажем **основной факт**, выражающий связь между двумя углами: углом между радиусом описанной окружности и стороной треугольника и углом треугольника. Знание этого факта помогает решить много геометрических задач.

Пусть O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC. Тогда $\angle OCA = 90° - \angle ABC$.

Доказательство. Пусть K – середина стороны AC (см. рис.), тогда треугольник AOC – равнобедренный, поэтому $OK \perp AC$. Значит, $\angle KOC = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle ABC$. Следовательно, $\angle OCA = 90° - \angle KOC = 90° - \angle ABC$.

Понятно, что для других радиусов все аналогично.

Следствия. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника (*дополнить рис*.). Тогда: 1) $\angle OCA = \angle C_1CB$; 2) прямые CO и CC_1 симметричны относительно биссектрисы угла ACB; 3) $OC \perp A_1B_1$, то есть, радиусы описанной окружности перпендикулярны сторонам ортотреугольника; 4) касательные к описанной окружности треугольника параллельны сторонам его ортотреугольника.

Доказательство. 1) $\angle C_1CB = 90° - \angle ABC$; 2) разность равных углов; 3) $\angle A_1B_1C + \angle KCO = \angle ABC + 90° - \angle KOC = 90°$, значит, $OC \perp A_1B_1$; 4) касательная, проведенная к описанной окружности в точке C, перпендикулярна радиусу OC, а $OC \perp A_1B_1$, значит, она параллельна A_1B_1.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Выведите аналогичный основной факт для случаев, когда один из углов A или B треугольника ABC – прямой или тупой. Верны ли следствия для этих случаев?

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса CL, O – центр окружности, описанной около ABC. На стороне AC отмечена точка D так, что $DC = BC$. Докажите, что $CO \perp DL$.

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Докажите, что если $\angle BAO = \angle DAC$, то диагонали четырехугольника перпендикулярны.

4. Биссектриса угла A равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекает описанную окружность в точке W, I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника IBW лежит на стороне BC.

5. H – ортоцентр остроугольного треугольника ABC, O_A и O_C – центры окружностей, описанных около треугольников AHB и CHB соответственно. Докажите, что $O_AO_C .= AC$.

6. Дан треугольник ABC. Рассматриваются все такие пары точек K и L на стороне AC, что $\angle ABK = \angle CBL$. Докажите, что центры описанных окружностей всех треугольников KBL лежат на одной прямой.

7. Произвольная прямая, проходящая через вершину B треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке K, а описанную около ABC окружность – в точке M. Докажите, что:
а) центры O_A описанных окружностей всех таких треугольников AMK лежат на одной прямой; б) $O_AK \perp BC$. в) Пусть O_C – центр окружности, описанной около треугольника CMK. Докажите, что прямые AO_A и CO_C пересекаются на высоте треугольника ABC.

8. Из середины D стороны BC треугольника ABC опущены перпендикуляры DE и DF на стороны AB и AC соответственно. M – середина отрезка EF. Докажите, что $DM \parallel AO$, где O – центр окружности, описанной около треугольника ABC.

9. Пусть I, I_a и I_c – центры вписанной и двух вневписанных окружностей треугольника ABC, O – центр описанной окружности треугольника II_aI_c. Докажите, что $OI \perp AC$.

10. Точка D вне остроугольного треугольника ABC такова, что $\angle ABC + \angle ABD = \angle ACB + \angle ACD = 180°$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке AD.