

### Равновеликость

В течение нескольких занятий мы будем заниматься площадями фигур. Для решения задач сегодняшнего занятия вам, если и понадобятся вычисления, то очень простые. Из формул для вычисления площадей потребуется в какой-то мере использовать только две: площади параллелограмма и треугольника (*при необходимости – напомнить*).

В предлагаемых задачах требуется либо доказать, что какие-то фигуры **равновелики** (то есть имеют равные площади), либо равновеликость фигур используется как раз для того, чтобы максимально упростить вычисления. Рассмотрим два простых примера.

**Пример 1.** Сторону  $AB$  треугольника  $ABC$  продолжили за вершину  $B$  и выбрали на луче  $AB$  точку  $A_1$  так, что точка  $B_{A_1}$  – середина отрезка  $AA_1$ . Аналогично, сторону  $BC$  продолжили за вершину  $C$  и отметили на продолжении точку  $B_1$  так, что  $C$  – середина  $BB_1$ . Так же продолжили сторону  $CA$  за вершину  $A$  и отметили на продолжении точку  $C_1$  так, что  $A$  – середина  $CC_1$ . Найдите площадь треугольника  $A_1B_1C_1$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна 1 (см. рис. 1).

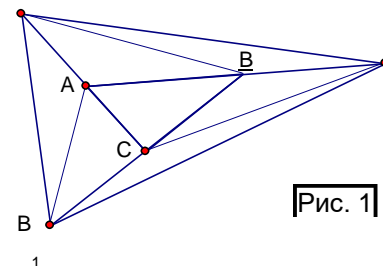


Рис. 1

**Решение.** Соединим точки  $B_1$  и  $A$ ,  $C_1$  и  $B$ ,  $A_1$  и  $C$ . Площади треугольников  $ABC$  и  $C_1AB$  равны, так как у них равны основания  $AC_1$  и  $AC$  и общая высота, проведенная из вершины  $B$ . Аналогично, равны площади треугольников  $ABC$  и  $A_1BC$ ,  $ABC$  и  $B_1AC$ . Площади треугольников  $ABC_1$  и  $BA_1C_1$  равны, так как у них равны основания  $AB$  и  $BA_1$  и общая высота, проведенная из вершины  $C_1$ . Аналогично, равны площади треугольников  $ACB_1$  и  $AC_1B_1$ ,  $CBA_1$  и  $CB_1A_1$ . Таким образом, треугольник  $A_1B_1C_1$  разбит на 7 треугольников площади 1. **Ответ:** 7.

**Пример 2.** В четырехугольнике  $ABCD$ :  $AB = BC$ ,  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90^\circ$  (см. рисунок). Найдите его площадь, если расстояние от вершины  $B$  до прямой  $AD$  равно 1.

**Решение.** Первый способ. Проведем перпендикуляры  $BP$  и  $BQ$  к прямым  $AD$  и  $CD$  (см. рис. 2а). Тогда из равенства прямоугольных треугольников  $ABP$  и (по гипотенузе и катету) следует, что площадь  $ABCD$  площади квадрата  $BPDQ$  со стороной 1.

*По сути, треугольник  $CBQ$  получается из треугольника*

*$ABP$  поворотом вокруг точки  $B$  на  $90^\circ$  против часовой стрелки.*

Второй способ. Продлим отрезки  $AB$  и  $CB$  на свою длину за точку  $B$  и получим квадрат  $ACA'C'$  (центральная симметрия относительно точки  $B$ , см. рис. 2б). Опишем около этого квадрата прямоугольник, который также является квадратом, тогда площадь  $ABCD$  равна четверти площади квадрата со стороной 2.

*Задачам, при решении которых используются вспомогательные квадраты, будет посвящено отдельное занятие. Ответ:* 1.

Большая часть задач этого занятия придумана двумя замечательными математиками: Вячеславом Викторовичем Произволовым и Максимом Анатольевичем Волчкевичем. К их творчеству мы еще не раз обратимся в последующих занятиях.

Рис. 2а

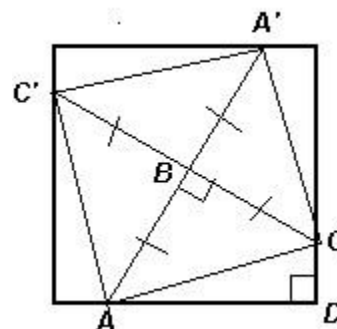
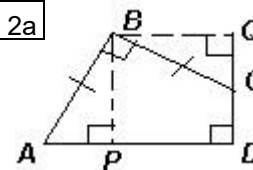
2а).  
СВQ  
равна

Рис. 2б

Задач для самостоятельного решения предлагается много, так как часть из них – довольно простые, но полезные. В их расположении по нарастанию трудности я не уверен, поэтому вполне можно «перескакивать».

### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

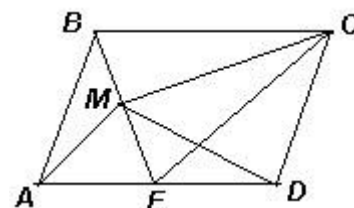
1

- а) Параллелограммы  $ABCD$  и  $BEFG$  с общей вершиной  $B$  расположены так, что точка  $C$  лежит на отрезке  $EF$ , а точка  $G$  – на отрезке  $AD$ . Докажите, что эти параллелограммы равновелики. б) Точки  $E$  – середина боковой стороны  $CD$ , а точка  $F$  – середина большего основания  $AD$  трапеции  $ABCD$ . Отрезки  $AE$  и  $BF$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что треугольник  $AOB$  и четырехугольник  $DEOF$  равновелики.
- а) В трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) из точки  $E$  – середины  $CD$  провели перпендикуляр  $EF$  к прямой  $AB$ . Найдите площадь трапеции, если  $AB = 5$ ,  $EF = 4$ . б) В трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) расстояния от вершин  $A$  и  $B$  до прямой  $CD$  равны 7 и 1 соответственно. Найдите площадь трапеции, если  $CD = 5$ .

3. а) Противоположные стороны шестиугольника  $ABCDEF$  равны и параллельны. Найдите площадь треугольника  $ACE$ , если площадь шестиугольника равна  $S$ .

б) Точки  $K$  и  $L$  – середины сторон  $AB$  и  $BC$  правильного шестиугольника  $ABCDEF$ . Отрезки  $KD$  и  $LE$  пересекаются в точке  $M$ . Площадь треугольника  $DEM$  равна 12. Найдите площадь четырехугольника  $KBLM$ .

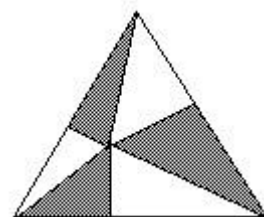
4. а) Внутри параллелограмма  $ABCD$  выбрана произвольная точка  $P$  и проведены отрезки  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  и  $PD$ . Площади трех из образовавшихся треугольников равны 1, 2 и 3 (в каком-то порядке). Какие значения может принимать площадь четвертого



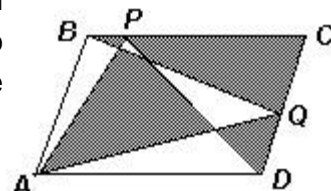
треугольника? б) Внутри параллелограмма  $ABCD$  отмечена точка  $M$ . Прямая  $BM$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $E$  (см. рисунок). Докажите, что треугольники  $AMD$  и  $CME$  равновелики.

5. а) Точка  $O$ , лежащая внутри выпуклого четырехугольника площади  $S$ , симметрично отражается относительно середин его сторон. Найдите площадь четырехугольника с

вершинами в полученных точках. б) В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  отмечены середины противоположных сторон  $BC$  и  $AD$  – точки  $M$  и  $N$ . Диагональ  $AC$  проходит через середину отрезка  $MN$ . Найдите площадь  $ABCD$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна  $S$ .

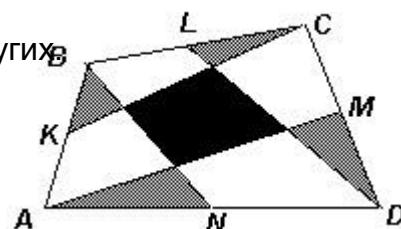


6. а) Внутри равностороннего треугольника отмечена точка, которая соединена отрезками с вершинами и из нее проведены перпендикуляры к сторонам (см. рисунок). Три из образовавшихся шести треугольников заштрихованы (через один). Докажите, что сумма площадей заштрихованных треугольников равна половине площади треугольника.



б) На сторонах  $BC$  и  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  отмечены точки  $P$  и  $Q$ . Точку  $P$  соединили отрезками с вершинами  $A$  и  $D$ , а точку  $Q$  – с вершинами  $A$  и  $B$  (см. рисунок). Докажите, что площадь

одной из закрасенных частей равна сумме площадей трех других. в) Точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  – середины сторон выпуклого четырехугольника  $ABCD$  (см. рисунок). Докажите, что сумма площадей заштрихованных треугольников равна площади закрасенного четырехугольника.



7. а) В пятиугольнике  $ABCDE$ :  $BC \parallel AD$ ,  $CD \parallel BE$ . Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $CDE$  равновелики. б) В выпуклом пятиугольнике  $ABCDE$ :  $BC = CD = AE = 1$ ,  $AB + DE = 1$ ,  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDE = 90^\circ$ . Найдите его площадь. в) В выпуклом пятиугольнике  $ABCDE$ :  $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 90^\circ$ ,  $AB = AE$ ,  $BC = CD$ ,  $AC = 1$ . Найдите площадь пятиугольника.