

### Перпендикуляры и описанная окружность

По статье Е. Бакаева, П. Кожевникова, И. Яковлева «Перпендикуляры и еще один признак вписанного четырехугольника», журнал «Квант», №5-6/2015.

На этом занятии мы познакомимся еще с одной конструкцией, в которой три перпендикуляра пересекаются в одной точке. Предложенная серия задач опирается на простой, но важный факт, который мы сформулируем в виде теоремы.

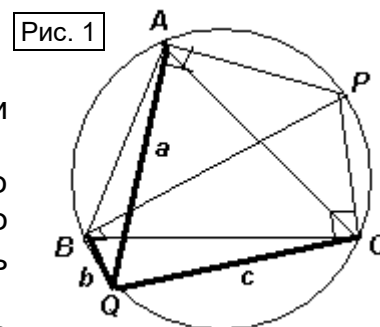
**Теорема.** Дан треугольник  $ABC$  и точка  $P$ . Через вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  проведены прямые  $a$ ,  $b$  и  $c$ , соответственно перпендикулярные прямым  $PA$ ,  $PB$  и  $PC$ . Прямые  $a$ ,  $b$  и  $c$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки  $P$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной окружности.

**Доказательство.** См. рис. 1.

1) Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  пересекаются в точке  $Q$ . Проведем окружность с диаметром  $PQ$ . Так как  $\angle QAP = \angle QBP = \angle QCP = 90^\circ$ , то точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на этой окружности.

2) Пусть точка  $P$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Рассмотрим точку  $Q$ , диаметрально противоположную  $P$ . Тогда  $\angle QAP = \angle QBP = \angle QCP = 90^\circ$ , то есть прямые  $a$ ,  $b$  и  $c$  пересекаются в точке  $Q$ .

Используя эту теорему, вы сможете не только доказывать пересечение каких-то перпендикуляров в одной точке или тот факт, что какие-то четыре точки лежат на одной окружности, но и некоторые другие факты.



### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

- К окружности с центром  $O$  проведены касательные в точках  $A$  и  $B$ , которые пересекаются в точке  $P$ . Из точки  $P$  проведена прямая, пересекающая окружность в точках  $C$  и  $D$  ( $C$  лежит между  $P$  и  $D$ ).  $M$  – середина отрезка  $CD$ . Докажите, что: а) точка  $M$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $APB$ ; б)  $\angle BMA = 2\angle BDA$ ; в) прямая  $BM$  вторично пересекает окружность в точке  $E$  так, что  $AE \parallel CD$ .
- а) Три прямые пересекаются в одной точке под углами  $60^\circ$  друг к другу. Из произвольной точки, не лежащей на этих прямых, опущены на них перпендикуляры. Докажите, что основания перпендикуляров являются вершинами равностороннего треугольника. б) Через точку внутри окружности проведены три хорды под углами  $60^\circ$  друг к другу. Докажите, что их середины являются вершинами равностороннего треугольника.
- В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $A'$  и середины отрезков  $BC'$  и  $CB'$  лежат на одной окружности.
- В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$ .
  - Произвольную точку спроектировали на прямые, содержащие высоты. Докажите, что треугольник, у которого проекции являются вершинами, подобен треугольнику  $ABC$ .
  - Точки  $B_1$  и  $C_1$  – середины высот  $BB'$  и  $CC'$  соответственно. Докажите, что треугольник  $A'B_1C_1$  подобен треугольнику  $ABC$ .
- На высотах  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  так, что они делят высоты в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины. Докажите, что треугольник  $A_1B_1C_1$  подобен треугольнику  $ABC$ .
- В треугольнике  $ABC$ :  $I$  – центр вписанной окружности,  $I_a$  и  $I_b$  – центры вневписанных окружностей, касающихся сторон  $BC$  и  $AC$  соответственно. Докажите, что точки  $C$ ,  $I$  и середины отрезков  $AI_a$  и  $BI_b$  лежат на одной окружности.
- Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  – точки описанной окружности треугольника  $ABC$ , диаметрально противоположные соответствующим вершинам, а точки  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  симметричны точкам  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  относительно сторон  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника  $A_2B_2C_2$  содержит ортоцентр треугольника  $ABC$ .

8. а) Пусть  $H_A$  – проекция ортоцентра  $H$  треугольника  $ABC$  на медиану, проведенную к стороне  $BC$ . Докажите, что  $H_A$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $BCH$ .
- б) Пусть  $H$  – ортоцентр треугольника  $ABC$ ,  $M$  – середина стороны  $BC$ ,  $P$  – вторая точка пересечения окружности, описанной около  $ABC$ , с окружностью, построенной на отрезке  $AH$  как на диаметре. Докажите, что точки  $M$ ,  $H$  и  $P$  лежат на одной прямой.
9. К двум окружностям, пересекающимся в точках  $A$  и  $B$ , проведена общая касательная,  $P$  и  $Q$  – точки касания  $H$  – ортоцентр треугольника  $PAQ$ . Докажите, что угол  $AH$  – прямой.
10. Дан треугольник  $ABC$ . Точка  $A_0$  лежит внутри угла  $BAC$ , а стороны  $AB$  и  $AC$  видны из нее под углами, дополняющими соответственно углы  $B$  и  $C$  треугольника до  $180^\circ$ . Точки  $B_0$  и  $C_0$  определяются аналогично. Докажите, что прямые  $AA_0$ ,  $BB_0$  и  $CC_0$  пересекаются в одной точке, причем эта точка лежит на описанной окружности треугольника  $A_0B_0C_0$ .