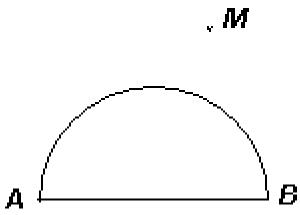
Пересечение прямых, содержащих высоты треугольника

Для начала вспомним несколько задач, которые вам наверняка известны. В частности, часть утверждений встречалась уже на наших предыдущих занятиях.

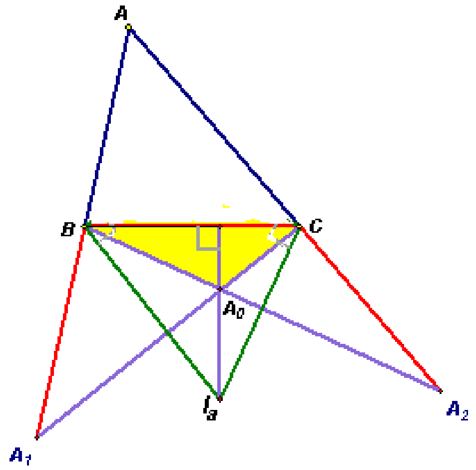


Пример 1. А) Дана полуокружность с диаметром AB и точка M (см. рис.). Пользуясь только линейкой без делений, постройте перпендикуляр из точки M к прямой AB.

Б) Как изменится построение, если точка дана внутри полукруга?

Следующую задачу мы подробно разбирали (см. «Дополнительные построения_2», №4).

Пример 2. В невыпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A, B и D равны по 45°. Докажите, что $AC \perp BD$ и $AC = BD$.



Еще одна задача была на занятии «Вневписанная окружность_1» и ее тогда никто не решил.

Пример 3. Дан треугольник ABC. На лучах AB и AC (вне треугольника) построены точки A_1 и A_2 соответственно так, что $BA_1 = CA_2 = BC$. A_0 – точка пересечения отрезков BA_2 и CA_1. Докажите, что прямая, проходящая через A_0 перпендикулярно прямой BC, содержит центр вневписанной окружности треугольника ABC.

Решение. Пусть I_a – центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны BC (см. рис.).

BI_a и CI_a – биссектрисы внешних углов B и C данного треугольника. По условию, треугольники A_1BC и A_2CB – равнобедренные, поэтому $BI_a \perp A_1C$ и $CI_a \perp A_2\hat{A}$. Следовательно, I_a – точка пересечения двух высот треугольника A_0BC, значит третья высота этого треугольника лежит на прямой A_0I_a, то есть $A_0I_a \perp BC$, что и требовалось доказать.

Несколько первых задач – это практически упражнения «на понимание».

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Точки C и D лежат на окружности с диаметром AB. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC – в точке Q. Докажите, что AB перпендикулярно PQ.

2. В треугольнике ABC сторона AC наименьшая. На сторонах AB и CB взяты точки K и L соответственно, причём $KA = AC = CL$. Пусть M – точка пересечения AL и KC , а I – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что прямая MI перпендикулярна прямой AC.

3. Биссектриса угла B и биссектриса внешнего угла D прямоугольника $ABCD$ пересекают сторону AD и прямую AB в точках M и K соответственно. Докажите, что отрезок MK: а) перпендикулярен; б) равен диагонали прямоугольника.

4. Пусть M – основание перпендикуляра, опущенного из вершины D параллелограмма $ABCD$ на диагональ AC. Докажите, что перпендикуляры к прямым AB и BC, проведённые через точки A и C соответственно, пересекутся на прямой DM.

5. Через каждую вершину параллелограмма проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не проходящей через эту вершину. Докажите, что диагонали четырёхугольника, образованного пересечениями четырёх проведённых прямых, перпендикулярны сторонам параллелограмма.

6. Дана линейка, на которой через каждый сантиметр отмечены деления. Используя только ее, постройте какую-нибудь прямую, перпендикулярную данной прямой.

7. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, соответственно перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB. Докажите, что эти прямые пересекаются на прямой AC.

8. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны CD. Через точку C проведен перпендикуляр к прямой BM, а через точку М – перпендикуляр к диагонали BD. Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой AD.

9. Точки M и N – середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC, и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD, пересекаются в точке P. Докажите, что $PA = PD$.

10. В треугольнике ABC: $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$. Точка M, лежащая внутри треугольника, такова, что $\angle AMB = 110°$, $\angle BMC = 130°$. Найдите угол MBC.

Указания и решения

1. Возможны два случая: а) Q – ортоцентр треугольника APB (см. рис. 1а); б) A – ортоцентр треугольника PBQ (см. рис. 1б).

Рис. 1а

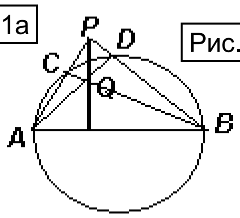
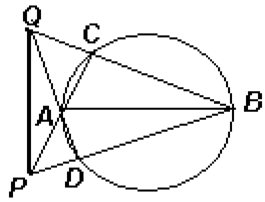


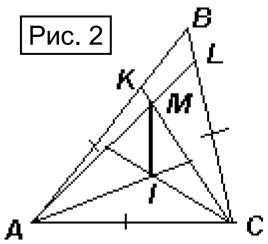
Рис. 1б



Случай а) – это переформулированный пример 1.

2. Так как треугольники ACK и CAL – равнобедренные, то биссектрисы углов A и C треугольника ABC содержат высоты треугольника AMC (см. рис. 2), I – ортоцентр этого треугольника, поэтому $MI \perp AC$.

Рис. 2



Задача аналогична примеру 3.

3. В невыпуклом четырехугольнике $KBMD$ – три угла по 45° (см. рис. 3).

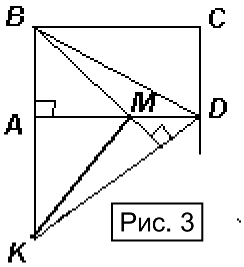


Рис. 3

Решение задачи аналогично решению примера 2.

4. Пусть K – точка пересечения перпендикуляров из условия (см. рис. 4). Тогда $CD \perp AK$, $AD \perp CK$, значит, D – ортоцентр треугольника AKC. Так как $DM \perp AC$ и $KD \perp AC$, то точка D лежит на прямой KM, что равносильно утверждению задачи.

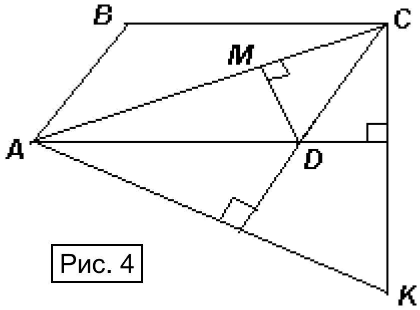


Рис. 4

5. Пусть диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, $KLMN$ – четырехугольник, образованный перпендикулярами к диагоналям (см. рис. 5). Тогда O – ортоцентр треугольника ALD, то есть $OL \perp AD$. Аналогично, $ON \perp BC$. Так как $AD \parallel BC$, то точка О лежит на прямой NL. Аналогично доказывается, что $KM \perp AB$ и $KM \perp CD$.

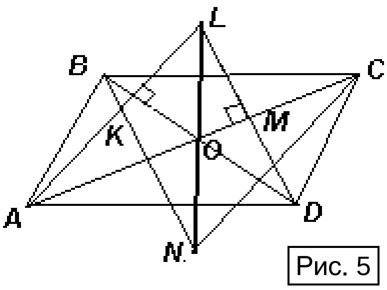
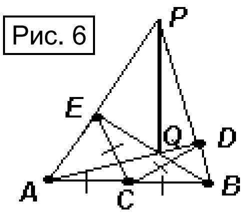


Рис. 5

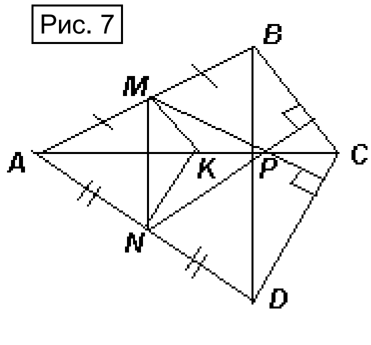
6. Последовательно отметим на данной прямой точки A, C и B так, что $AC = BC = 1$. Отметим вне данной прямой, но в одной полуплоскости точки D и E так, что $DC = EC = 1$ (см. рис. 6). Тогда треугольники ABD и BAE – прямоугольные. Пусть AE и BD пересекаются в точке P, а AD и BE – в точке Q, тогда Q – ортоцентр треугольника APB. Значит, $PQ \perp AB$.

Рис. 6



7. Пусть M, K и N – середины отрезков AB, AC и AD соответственно, а перпендикуляры к противолежащим сторонам, проведенные из точек M и N, пересекаются в точке P (см. рис. 7). Тогда стороны треугольника MKN соответственно параллельны сторонам треугольника BCD,

Рис. 7



значит, $NP \perp MK$ и $MP \perp NK$, то есть, P – ортоцентр треугольника MKN. Но третья высота этого треугольника лежит на прямой, AC, следовательно точка P – на прямой AC.

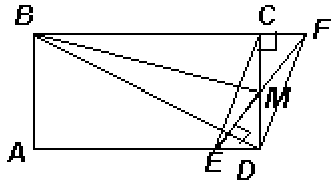


Рис. 8

8. Пусть перпендикуляр, проведенный из точки M к BD пересекает прямую AD в точке E (см. рис. 8). Докажем, что $CE \perp BM$. Действительно, пусть прямые EM и BC пересекаются в точке F, тогда M – ортоцентр треугольника BFD, значит, $BM \perp DF$. Но $CFDE$ – параллелограмм, следовательно, $CE \parallel DF$. Таким образом, $CE \perp BM$.

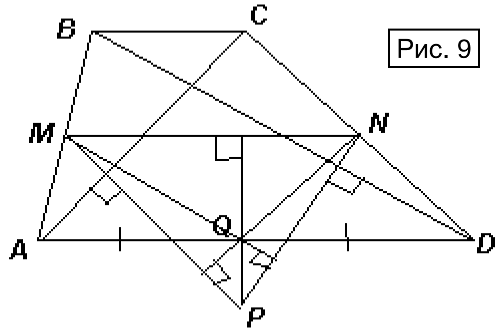


Рис. 9

9. Пусть Q – середина стороны AD (см. рис. 9). Тогда $MQ \parallel BD$, значит, $MQ \perp NP$. Аналогично, $NQ \parallel AC$, значит, $NQ \perp MP$. Следовательно, Q – ортоцентр треугольника MPN, поэтому, $ĐQ \perp MN$.

Таким образом, $ĐQ$ – серединный перпендикуляр к AD, значит, $PA = PD$.

10. Ответ: 20°.

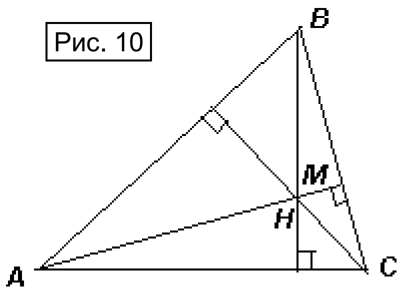


Рис. 10

Пусть H – ортоцентр треугольника ABC, тогда $\angle AHB = 180° - \angle ACB = 180° - 70° = 110° = \angle AMB$; $\angle BHC = 180° - \angle CAB = 180° - 50° = 130° = \angle BMC$ (см. рис. 10). Из точек M и H отрезки AB и BC видны под одинаковыми углами, обе точки лежат внутри треугольника ABC (так как он – остроугольный), значит, обе точки являются пересечением двух дуг, лежащих внутри треугольника. Следовательно, точки M и H совпадают. Тогда $\angle MBC = 90° - \angle ACB = 90° - 70° = 20°$.