16.02.16

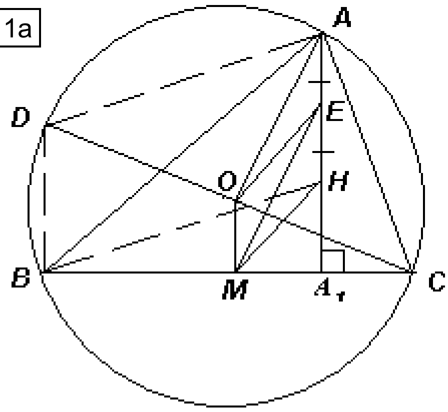
Параллелограммы в треугольнике

В течение двух занятий мы рассмотрим геометрическую конструкцию, которая некоторым из вас знакома. В процессе решения задач вы получите ряд важных фактов геометрии треугольника.

Рассмотрим остроугольный треугольник ABC, O – центр описанной около него окружности, AA_1 – высота, H – ортоцентр, M – середина BC (см. рис. 1а).

1) Докажем, что $OM = \frac{1}{2}AH$.

Рис. 1а



Решение. Проведем описанную и окружность и ее диаметр CD. Тогда $\angle DBC = 90°$, значит, $BD \parallel AH$. Кроме того, $DA \perp AC$ и $BH \perp AC$, поэтому, $DA \parallel BH$. Таким образом, $BDAH$ – параллелограмм. Так как O – середина DC, M – середина BC, то OM – средняя линия треугольника BCD, следовательно, $OM \parallel BD \parallel AH$ и $OM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AH$.

Таким образом, ***расстояние от центра описанной окружности до стороны треугольника в два раза меньше расстояния от противолежащей вершины до ортоцентра***.

2) Пусть E – середина отрезка AH. Докажите, что ***четырехугольники OMHE и OMEA – параллелограммы***.

Решение. $OM \parallel AH$ и $OM = AE = EH$.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что полученные утверждения справедливы и для тупоугольного треугольника.

2. В треугольнике ABC: M – середина BC, O – центр описанной окружности, R – ее радиус, H – ортоцентр, E – середина AH. Докажите, что: а) $ME = R$; б) медиана AM делит отрезок OE пополам.

3. Треугольники ABC и A_1BC вписаны в одну и туже окружность, H и H_1 – их ортоцентры. Докажите, что $AH = A_1H_1$.

4. В треугольнике ABC: $BC = a$; $\angle BAC = \alpha$, H – ортоцентр, R – ее радиус описанной окружности. Докажите, что: а) $AH = 2R|\cos\alpha|$; б) $AH^2 = 4R^2 - a^2$.

5. В остроугольном треугольнике ABC: AA_1 – высота, M – середина BC, O – центр описанной окружности, H – ортоцентр, F – середина OH. Найдите угол A_1FM, если $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.

6. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AL пересекает отрезок ME в точке N (M – середина BC, E – середина AH, где H – ортоцентр). Докажите, что: а) $NE = AE$; б) $\angle ANH = 90°$.

7. Через ортоцентр H треугольника ABC провели прямые, параллельные сторонам AB и AC и пересекающие прямую BC в точках F и D соответственно. Через точки D и F проведены перпендикуляры к BC, пересекающие AB и AC в точках D' и F' соответственно. Докажите, что прямая $D'F'$ пересекает окружность, описанную около ABC, в точках, диаметрально противоположных точкам B и C.

8. В треугольнике ABC O – центр описанной окружности, H – ортоцентр. Докажите, что $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ (***формула Гамильтона***).

9. а) Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, где O – центр окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b и c, R – ее радиус, H – ортоцентр треугольника. б) Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, у которого сумма квадратов сторон наибольшая.

10. В треугольник *ABC* вписана окружность. Из середины каждого отрезка, соединяющего две точки касания, проводится перпендикуляр к противолежащей стороне. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.