

### Кратчайшие маршруты

В течение двух занятий мы займемся геометрическими задачами, связанными с наибольшими и наименьшими значениями каких-либо величин. Такие задачи называются **экстремальными** (от слова *extremum* – крайний). Задачи сегодняшнего занятия будут связаны с поиском кратчайших маршрутов или наименьших сумм расстояний.

В качестве примера рассмотрим знаменитую задачу Герона Александрийского, а затем усложним ее.

**Пример.** Дана прямая  $m$  и точки  $A$  и  $B$ , лежащие в одной полуплоскости относительно  $m$ . Постройте на прямой  $m$ : а) такую точку  $M$ , чтобы ломаная  $AMB$  имела наименьшую длину; б) отрезок  $CD$  заданной длины (много меньшей, чем расстояние от  $A$  до  $B$ ) так, чтобы длина ломаной  $ACDB$  была наименьшей.

**Решение.** а) Пусть искомая точка  $M$  построена. Рассмотрим точку  $B'$ , симметричную точке  $B$  относительно прямой  $m$  (см. рис. 1а). Длина ломаной  $AMB$  равна:  $AM + MB = AM + MB'$  (см. рис. 1а). Эта длина будет наименьшей из возможных, если точка  $M$  лежит на отрезке  $AB'$ . Действительно, для любой другой точки  $N$ , лежащей на прямой  $CD$ ,  $AN + NB = AN + NB' > AB' = AM + MB'$ .

Таким образом, решение задачи сводится к построению точки  $B'$ , симметричной точке  $B$  относительно прямой  $m$ . Искомая точка  $M$  является пересечением прямых  $AB'$  и  $m$ .

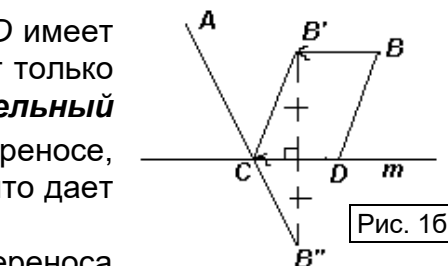
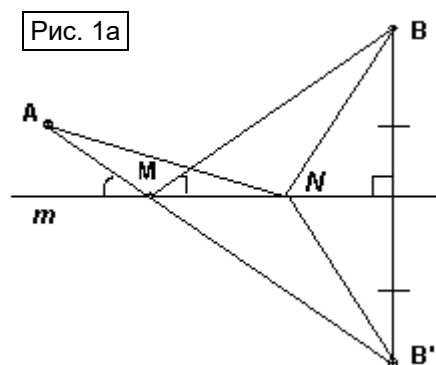
Понятно, что точки  $A$  и  $B$  равноправны, поэтому можно было строить точку, симметричную точке  $A$ . Кроме того, из рассмотренной осевой симметрии следует, что  $\angle AMC = \angle B'MD = \angle BMD$ , то есть условие минимальности длины ломаной равносильно тому, что лучи  $MA$  и  $MB$  образуют равные углы с прямой  $CD$ . Это понятно также из «физических соображений»: угол падения светового луча на плоское зеркало равен углу отражения (изобразить). Это позволяет различным образом переформулировать задачу, в частности и в виде модели различных жизненных ситуаций.

б) Пусть искомые точки  $C$  и  $D$  построены и отрезок  $CD$  имеет заданную длину (см. рис. 1б). Длина ломаной  $ACDB$  зависит только от суммы длин  $AC$  и  $BD$ , поэтому рассмотрим **параллельный перенос** на вектор  $\overline{DC}$ :  $B'$  – образ точки  $B$  при таком переносе, тогда отрезки  $AC$  и  $B'C$  образуют равные углы с прямой  $m$ , что дает наименьшее значение суммы длин  $AC$  и  $BD$ .

Таким образом, после выполнения параллельного переноса вдоль прямой  $m$  на отрезок заданной длины (например, в направлении от  $B$  к  $A$ ), решение задачи сведется к построению точки  $C$ , описанному в примере 1а. Точка  $D$  является образом точки  $C$  при обратном параллельном переносе.

Отметим, что точка  $B''$ , использованная при описанном построении является образом точки  $B$  при **скользящей симметрии** (композиции осевой симметрии и параллельного переноса вдоль этой оси).

Таким образом, многие задачи, связанные с наименьшей длиной пути, решаются с использованием осевой симметрии и параллельного переноса. Но, наряду с ними, могут использоваться и другие приемы, которые вам придется придумать.



### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до его вершин наименьшая.
2. а) Дан острый угол  $AOB$  и точка  $M$  внутри него. На сторонах угла постройте точки  $X$  и  $Y$  так, чтобы периметр треугольника  $MXY$  был наименьшим.

- б) Найдите этот периметр, если  $\angle AOB = 30^\circ$ ,  $OM = 1$ .
3. Внутри острого угла  $AOB$  даны точки  $A$  и  $B$ . Постройте на сторонах угла точки  $X$  и  $Y$  так, чтобы периметр четырехугольника  $XMNY$  был наименьшим.
4. Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до всех вершин и до всех сторон треугольника – наименьшая.
5. а) Населенные пункты  $A$  и  $B$  разделены каналом с параллельными берегами. В каком месте необходимо построить мост (перпендикулярно берегам), чтобы длина пути из одного пункта в другой была наименьшей?  
б) Населенные пункты  $A$  и  $B$  разделены двумя непараллельными друг другу каналами (у каждого канала два берега параллельны). Где нужно построить мосты, чтобы длина пути из одного пункта в другой была наименьшей?
6. Дан равносторонний треугольник  $ABC$ . Постройте прямую  $m$  так, чтобы сумма расстояний от вершин треугольника до  $m$  была наименьшей.
7. Один из углов остроугольного треугольника равен  $30^\circ$ . На сторонах треугольника отмечено по одной точке. Докажите, что наименьший периметр треугольника с вершинами в этих точках равен одной из высот данного треугольника.
8. Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . На его сторонах отмечены точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  (по одной на каждой стороне). Укажите положение этих точек, для которого периметр треугольника будет наименьшим. (**Задача Фаньяно**)
9. На каждой стороне прямоугольника отмечено по точке. Докажите, что наименьший периметр четырехугольника с вершинами в этих точках равен сумме диагоналей прямоугольника.
10. Дан угол и точка внутри него. Постройте прямую, проходящую через эту точку, которая отсекает от угла треугольник наименьшего периметра.