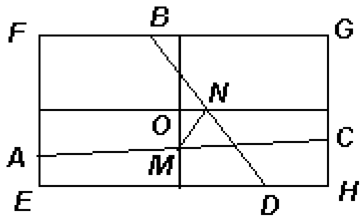
2.02.16

Геометрическое место точек_2

На этом занятии будет активно задействовано ГМТ, которое на предыдущем занятии мы вспомнили, но не использовали при решении задач: ГМТ, из которых данный отрезок виден под заданным углом. Чаще всего встречается его частный случай, когда заданный угол – прямой.

Пример. На плоскости даны точки *A*, *B*, *C* и *D*. Рассматриваются все прямоугольники, для которых эти точки лежат на сторонах (по одной точке на каждой стороне). Найдите геометрическое место центров таких прямоугольников.



Решение. Пусть *EFGH* – один из прямоугольников с центром *O*, а точки *A* и *C* лежат на его противоположных сторонах *EF* и *GH*. Рис. 1

Проведем через точку O оси симметрии прямоугольника. По теореме Фалеса они пройдут через середины *M* и *N* отрезков *AC* и *BD* (см. рис. 1). Так как $\angle MON = 90°$, то точка *O* лежит на окружности с диаметром *MN*.

Обратно, для любой точки этой окружности, отличной от *M* и *N*, проведем прямые *OM* и *ON*, тогда $\angle MON = 90°$. Далее, проведя прямые из точек *A* и *C* перпендикулярно *ON*, а из точек *B* и *D* – перпендикулярно *OM*, получим прямоугольник с центром *O*. При этом, точки *M* и *N* также являются центрами прямоугольников.

Учитывая, что на противоположных сторонах прямоугольника могут лежать также точки *A* и *B* или *A* и *D*, получим, что ***искомое ГМТ – объединение трех окружностей, диаметрами которых являются отрезки, соединяющие середины AC и BD, AB и CD, AD и BC***.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Даны окружность с центром *O* и точка *A*, ей принадлежащая. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности в точке *A*.

2. Дана окружность. Найдите ГМТ *M* таких, что касательные проведенные из *M* к окружности имеют заданную длину.

3. На прямой отмечены точки *A* и *B*. Рассматриваются все пары касающихся между собой окружностей, одна из которых касается прямой в точке *A*, а другая – в точке *B*. Найдите ГМТ касания окружностей.

4. Даны окружность и точка *A*. Найдите геометрическое место середин хорд, проходящих через точку *A*, если эта точка лежит: а) на окружности; б) внутри окружности; в) вне окружности.

5. Рассматриваются все треугольники *ABC*, у которых положение вершин *B* и *C* зафиксировано, а вершина *A* перемещается в плоскости треугольника так, что медиана *CM* имеет одну и ту же длину. По какой траектории движется точка *A*?

6. Дана хорда *AB* окружности. Рассматриваются всевозможные треугольники *ABC*, вписанные в эту окружность. Найдите ГМТ пересечения: а) высот; б) биссектрис треугольника *ABC.*

7. Точка *P* перемещается по описанной окружности квадрата *ABCD*. Прямые *AP* и *BD* пересекаются в точке *Q*, а прямая, проходящая через точку *Q* параллельно *AC*, пересекает прямую *BP* в точке *M*. Найдите ГМТ *M.*

8. Найдите ГМТ *X*, лежащих внутри равностороннего треугольника *ABC* и для которых выполняется равенство $\angle XAB + \angle XBC + \angle XCA = 90°$.

9. Дан равносторонний треугольник *ABC*. а) Найдите ГМТ *X* таких, что $AX^2 = BX^2 + CX^2$. б) Докажите, что проекции любой из точек найденного ГМТ на прямые, содержащие стороны треугольника, являются вершинами прямоугольного треугольника.