

### Две пересекающиеся окружности

На этом занятии нам опять потребуются все основные теоремы, связанные с углами в окружности: 1) теорема о вписанном угле и ее следствие; 2) теорема об угле между касательной и хордой; 3) необходимые и достаточные условия того, чтобы четырехугольник был вписанным в окружность (*три варианта*); 4) ГМТ, из которых данный отрезок виден под заданным углом.

Во всех задачах этого занятия будет в том или ином виде присутствовать конструкция из двух пересекающихся окружностей.

**Пример.** Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Через точку  $A$  первой окружности проведены прямые  $AP$  и  $AQ$ , пересекающие вторую окружность в точках  $B$  и  $C$ . Докажите, что: а) длина отрезка  $BC$  не зависит от выбора точки  $A$ ; б) касательная в точке  $A$  к первой окружности параллельна прямой  $BC$ .

**Решение.** Возможны два случая расположения точки  $A$  (см. рис. 1 а, б).

а) Достаточно доказать, что все такие отрезки  $BC$  стягивают равные дуги. Рассмотрим угол  $BPC$ , опирающийся на дугу  $BC$ . Он является внешним для треугольника  $APC$ , значит,  $\angle BPC = \angle PAC + \angle PCA$ , а оба этих угла постоянны, так как опираются на фиксированные дуги данных окружностей (на рис. 1б  $\angle PCA = 180^\circ - \angle PCQ$ , который фиксирован).

б) Пусть  $AH$  – касательная к окружности. Используя теорему об угле между касательной и хордой и тот факт, что точки  $B, C, P$  и  $Q$  лежат на одной окружности, получим:  $\angle PBC = \angle PQA = \angle PAH$ . Следовательно,  $AH \parallel BC$ .

Можно также использовать антипараллельность отрезков  $BC$  и  $PQ$  по отношению к данным секущим.

Почти во всех задачах этой конструкции будут возможны два случая расположения. Если они аналогичны, то для экономии времени вы можете рассматривать только один из них.

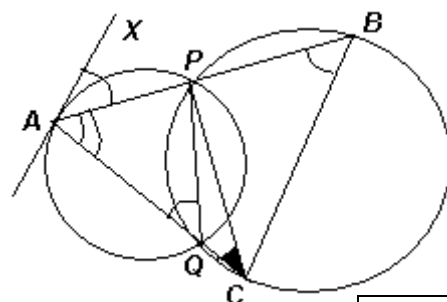


Рис. 1а

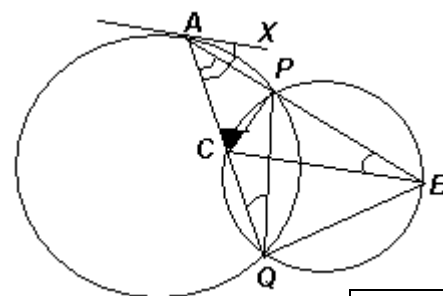


Рис. 1б

### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

- Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Через точку  $P$  проведена секущая, которая пересекает окружности в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что величина угла  $AQB$  не зависит от выбора секущей.
- Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Через точку  $P$  проведена секущая, которая пересекает окружности в точках  $A$  и  $B$ , а через точку  $Q$  – секущая, которая пересекает окружности в точках  $C$  и  $D$  соответственно. Докажите, что: а)  $\angle AQB = \angle CPD$ ; б)  $AC \parallel BD$ ; в)  $AC = BD$  тогда и только тогда, когда  $AB \parallel CD$ .
- Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  проведена секущая, которая пересекает окружности в точках  $C$  и  $D$ . Через точки  $C$  и  $D$  проведены касательные к окружностям, которые пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что: а) четырехугольник  $BCED$  – вписанный; б) величина угла  $CED$  не зависит от выбора секущей.
- На хорде  $AB$  окружности с центром  $O$  выбрана произвольная точка  $C$ . Через точки  $A, O$  и  $C$  проведена окружность, которая пересекает данную окружность в точке  $D$ . Докажите, что треугольник  $BCD$  – равнобедренный.
- Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Прямая последовательно пересекает эти окружности в точках  $A, B, C$  и  $D$ . Докажите, что  $\angle APB = \angle CQD$ .

6. Две окружности одинакового радиуса пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Произвольная прямая, проходящая через точку  $B$ , пересекает еще раз эти окружности в точках  $X$  и  $Y$ . Найдите геометрическое место середин отрезков  $XY$ .
7. Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Через точку  $P$  проведена секущая, которая пересекает окружности в точках  $A$  и  $B$ . Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника  $AQB$ .
8. Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Через произвольную точку  $X$  первой окружности проведены прямая  $XA$ , которая пересекает вторую окружность в точке  $Y$  и прямая  $XB$ , которая пересекает вторую окружность в точке  $Z$ . Рассматриваются все треугольники  $XYZ$ .
- 1) Докажите, что: а) высоты; б) биссектрисы; в)\* медианы всех таких треугольников, проведенные из точки  $X$ , проходят через одну и ту же точку.
  - 2) Найдите положение точки  $X$ , для которого треугольник  $XYZ$  имеет наибольшую площадь.
  - 3)\* Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников  $XYZ$ .
  - 4)\* Пусть окружность, описанная около треугольника  $XYZ$ , вторично пересекает первую окружность в точке  $D$ . Докажите, что угол  $XDO'$  – прямой.
9. Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Общая касательная к этим окружностям касается их в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что:
- а) прямая  $PQ$  пересекает отрезок  $AB$  в его середине;
  - б) равны радиусы окружностей, описанных около треугольников  $APB$  и  $AQB$ ;
  - в) окружность, описанная около одного из этих треугольников, проходит через ортоцентр другого треугольника.