Гробарий

ТЧ 4 Докажите, что для любого натурального $n > 2$ число $[(\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+2})^3] + 1$ делится на 8.

ТЧ 5 При каких натуральных n число $n^3 - 2n - 1$ является точным квадратом?

ТЧ 6 Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, таких что сумма цифр числа 3^{n+1} не превосходит суммы цифр числа 3^n.

ТЧ 8 Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, причём коэффициент при старшей степени равен 1. Известно, что для любого натурального n уравнение $P(x) = 2^n$ имеет целый корень. Докажите, что $P(x)$ имеет степень 1.

Графы 7б Дан граф, в котором $2n$ вершин и $n^2 + 1$ ребер. Докажите, что в нем есть хотя бы n треугольников.

Геом 7 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Точки E и F – середины не содержащих других вершин дуг AB и CD соответственно. Прямые, проходящие через точки E и F параллельно диагоналям четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точках K и L. Докажите, что прямая KL содержит точку O.

Показатели 6 Пусть p и q – простые числа, большие 5. Докажите, что если $p|2^q + 3^q$, то $q < p$.

Алгебра 8 Натуральные числа p и q взаимно просты. Отрезок $[0; 1]$ разбит на $p+q$ одинаковых отрезков. Докажите, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних лежит ровно одно из $p + q - 2$ чисел

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}.$$

Геом 3 В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась точка P такая, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

Геом 4 На каждой стороне треугольника ABC построено по квадрату во внешнюю сторону. Оказалось, что внешние вершины всех квадратов лежат на одной окружности. Доказать, что треугольник ABC – равнобедренный.

Геом 5 Прямые PC и PD касаются окружности с диаметром AB (C и D – точки касания). Докажите, что прямая, соединяющая P с точкой пересечения прямых AC и BD, перпендикулярна AB.

Геом 6 Периметр треугольникаABC равен 4. На лучах AB и AC отмечены точки X и Y так, что $AX = AY = 1$. Отрезки BC и XY пересекаются в точке M. Докажите, что периметр одного из треугольников ABM и ACM равен 2.

Геом 7 В остроугольном треугольнике отметили отличные от вершин точки пересечения описанной окружности с высотами, проведенными из двух вершин, и биссектрисой, проведенной из третьей вершины, после чего сам треугольник стерли. Восстановите его.

Комба 5 В каждом из 30 сундуков лежат 100 монет (монеты в одном сундуке одинаковые, монеты в разных сундуках могут быть разными). Вес каждой монеты составляет целое число грамм от 1 до 9 (включительно). В наличие есть весы, которые могут показать массу груза не более 999 грамм. Какое наименьшее количество взвешиваний на этих весах нам понадобится, чтобы определить какие монеты лежат в каком сундуке?

Еще комба 5 В полдень на каждую из трёх стрелок часов село по мухе. В течение дня при встрече двух стрелок мухи на них менялись местами. Сколько оборотов к полуночи совершила каждая из мух? Стрелки часов перемещаются непрерывно.

Ст. точки 11 В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Докажите,что прямая XY проходит через середину K диагонали AC.

Ег. дроби 3 а) Докажите, что любое рациональное число из интервала $(0,1)$ можно представить в виде $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$, где $a_i \in N$, $a_{i+1} > a_i^2 - a_i, a_i \geq 2$.
б) Однозначно ли такое представление?

Ег. дроби 4 а) Докажите, что $\frac{1}{2}$ равно сумме всех дробей вида $\frac{1}{pq}$, где $0 < p < q \leq n$, $p+q > n$, $(p,q) = 1$.
б) Докажите, что любое положительное рациональное число можно представить в виде суммы различных дробей вида $\frac{1}{n}$.

Ег. дроби 5 а) Докажите, что любое рациональное число из интервала $(0,1)$ можно представить в виде $\frac{a_1}{2!}+\frac{a_2}{3!}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n!}$, где для каждого i выполняется неравенство $0 \leq a_i \leq i$.
б) Однозначно ли такое представление?

Рад. оси 6 Дан такой выпуклый четырехугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M — середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведенным из точки C к прямой AD, в точке H. Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.

Рад. оси 7 На сторонах BC, AC, AB остроугольного треугольника ABC выбраны произвольные точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что три общие хорды пар окружностей с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке пересечения высот треугольника ABC.

Рад. оси 8 Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC, а K – точка пересечения перпендикуляра к BI, восстановленного в точке I, и прямой AC. Докажите, что основание перпендикуляра, опущенного из I на BK лежит на описанной окружности треугольника ABC.