

## Снова красим графы

9 класс

18.04.16

*Определение.* Способ окраски вершин графа, при котором любым двум смежным вершинам соответствуют разные цвета, называется правильной раскраской графа.

1. Степень любой вершины графа не превосходит  $d$ . Докажите, что его вершины можно покрасить в  $d + 1$  цвет правильным образом.
2. Дан ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит не более  $d$  ребер. Докажите, что его вершины можно правильным образом раскрасить в  $2d + 1$  цвет.
3. Степень любой вершины графа не превосходит  $d$ . Докажите, что его вершины можно раскрасить в  $d^2 + 1$  цвет таким образом, чтобы расстояние между любыми двумя вершинами одинакового цвета было более двух ребер.
4. Степени всех вершин связного графа не превосходят  $d$ . Докажите, что его вершины можно правильным образом раскрасить в  $d$  цветов, если
  - а) есть вершина, имеющая степень меньше, чем  $d$ ;
  - б) есть вершина, при удалении которой, граф теряет связность;
  - в)  $d > 2$  и есть две вершины такие, что при удалении их обоих граф теряет связность;
  - г) есть три вершины  $u, v$  и  $w$  такие, что  $u$  смежна с  $v$  и  $w$ , вершины  $v$  и  $w$  не смежны и при удалении вершин  $v$  и  $w$  связность не нарушается.
5. **(Теорема Брукса)** Степени всех вершин связного графа, не являющегося нечетным циклом или полным графом из  $d + 1$  вершины, не превосходят  $d$ . Докажите, что его вершины можно раскрасить в  $d$  цветов правильным образом.

*Комментарий.* Связность графа не является необходимым условием для данной теоремы.

## Снова красим графы

9 класс

18.04.16

*Определение.* Способ окраски вершин графа, при котором любым двум смежным вершинам соответствуют разные цвета, называется правильной раскраской графа.

1. Степень любой вершины графа не превосходит  $d$ . Докажите, что его вершины можно покрасить в  $d + 1$  цвет правильным образом.
2. Дан ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит не более  $d$  ребер. Докажите, что его вершины можно правильным образом раскрасить в  $2d + 1$  цвет.
3. Степень любой вершины графа не превосходит  $d$ . Докажите, что его вершины можно раскрасить в  $d^2 + 1$  цвет таким образом, чтобы расстояние между любыми двумя вершинами одинакового цвета было более двух ребер.
4. Степени всех вершин связного графа не превосходят  $d$ . Докажите, что его вершины можно правильным образом раскрасить в  $d$  цветов, если
  - а) есть вершина, имеющая степень меньше, чем  $d$ ;
  - б) есть вершина, при удалении которой, граф теряет связность;
  - в)  $d > 2$  и есть две вершины такие, что при удалении их обоих граф теряет связность;
  - г) есть три вершины  $u, v$  и  $w$  такие, что  $u$  смежна с  $v$  и  $w$ , вершины  $v$  и  $w$  не смежны и при удалении вершин  $v$  и  $w$  связность не нарушается.
5. **(Теорема Брукса)** Степени всех вершин связного графа, не являющегося нечетным циклом или полным графом из  $d + 1$  вершины, не превосходят  $d$ . Докажите, что его вершины можно раскрасить в  $d$  цветов правильным образом.

*Комментарий.* Связность графа не является необходимым условием для данной теоремы.