Многочлены

9 класс

15.02.2016

1. При каких a и b уравнение $x^3 + ax + b = 0$ имеет три различных решения, составляющих арифметическую прогрессию?

2. Известно, что $abc = 1$, $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел a, b или c равно 1.

3. Рациональные числа $x_1, x_2, ..., x_n$ таковы, что числа

$$x_1 + x_2 + ... + x_n$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n$$

$$...$$

$$x_1x_2...x_n$$

целые.
Докажите, что числа $x_1, x_2, ..., x_n$ целые.

4. Докажите, что значение выражения не зависит от x

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}.$$

5. Многочлен P седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках принимает значения ± 1. Докажите, что многочлен P неприводим над Z, иными словами не существует многочленов Q_1 и Q_2 ненулевой степени с целыми коэффициентами таких, что $P = Q_1Q_2$.

6. Средиземный многочлен (in English: Mediterranean polynomial) имеет 10 действительных корней и представляется в виде:

$$P(x) = x^{10} - 20x^9 + 135x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

где $a_0 \ldots, a_7 \in R$. Какое максимальное значение может принимать корень этого многочлена?

7. Найдите все многочлены $p(x)$, такие, что для любых ненулевых чисел x, y, z, удовлетворяющих условию $xz + yz = xy$, имеет место равенство: $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{p(y)} = \dfrac{1}{p(z)}$.

Многочлены

9 класс

15.02.2016

1. При каких a и b уравнение $x^3 + ax + b = 0$ имеет три различных решения, составляющих арифметическую прогрессию?

2. Известно, что $abc = 1$, $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел a, b или c равно 1.

3. Рациональные числа $x_1, x_2, ..., x_n$ таковы, что числа

$$x_1 + x_2 + ... + x_n$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n$$

$$...$$

$$x_1x_2...x_n$$

целые.
Докажите, что числа $x_1, x_2, ..., x_n$ целые.

4. Докажите, что значение выражения не зависит от x

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}.$$

5. Многочлен P седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках принимает значения ± 1. Докажите, что многочлен P неприводим над Z, иными словами не существует многочленов Q_1 и Q_2 ненулевой степени с целыми коэффициентами таких, что $P = Q_1Q_2$.

6. Средиземный многочлен (in English: Mediterranean polynomial) имеет 10 действительных корней и представляется в виде:

$$P(x) = x^{10} - 20x^9 + 135x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

где $a_0 \ldots, a_7 \in R$. Какое максимальное значение может принимать корень этого многочлена?

7. Найдите все многочлены $p(x)$, такие, что для любых ненулевых чисел x, y, z, удовлетворяющих условию $xz + yz = xy$, имеет место равенство: $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{p(y)} = \dfrac{1}{p(z)}$.