КБШ

9 класс

14.01.16

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.
Для любых вещественных чисел$a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ выполняется неравенство:

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2;$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда наборы чисел a_i и b_i пропорциональны (или один из наборов нулевой).

1. Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ докажите неравенство:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2.$$

2. Для положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ докажите неравенство:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + .. + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + .. + a_n)^2}{b_1 + b_2 + .. + b_n}.$$

3. Используя КБШ, докажите неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 ... + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

4. Для положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ докажите неравенство:

$$\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_n}\sqrt{b_1 + b_2 + ... + b_n} \geq \sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + ... + \sqrt{a_nb_n}.$$

5. Для положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ докажите неравенство:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + .. + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + .. + a_n)^2}{a_1b_1 + a_2b_2 + .. + a_nb_n}.$$

6. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенства:

а)

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2};$$

б)

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

7. Для положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ таких, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, докажите неравенство:

$$(a_1 + \frac{1}{a_1})^2 + (a_1 + \frac{1}{a_1})^2 + \cdots + (a_1 + \frac{1}{a_1})^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$