

Двудольные графы

29.10.15

Граф — *двудольный*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет ребер с концами одинакового цвета.

- Докажите, что дерево является двудольным графом.
 - Докажите, что из любого связного графа можно удалить несколько ребер так, чтобы сохранилась связность и граф стал двудольным.
- На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в симметричную относительно средней линии позицию ровно за 2015 ходов?
 - На шахматной доске стоят пять одинаковых фишек. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в центрально симметричную позицию ровно за 2015 ходов?
- Пусть Γ — двудольный граф с черными и белыми вершинами. Докажите, что
 - Все замкнутые циклы в графе Γ имеют четную длину.
 - Если в Γ есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета — поровну.
 - Если в Γ есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то число белых вершин отличается от числа черных вершин не более чем на 1.
- Замок в форме треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 м. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?
- Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10, как на рисунке.

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Женя прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Женя была один раз, на клетке 2 — два раза, ..., на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Женя на клетке 10?

- Докажите, что следующий граф — двудольный: Вершины графа — расстановка пары фишек на шахматной доске. Две расстановки связаны ребром, если позиции получаются друг из друга ходом фишки на одну клетку по вертикали или горизонтали.
 - На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Так ходили, пока не прошли через все возможные позиции. Докажите, что какая-то позиция встретилась не менее двух раз.