

Обязательная письменная олимпиада на неделю

9 класс

26.10.15

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 . Прямая, перпендикулярная стороне AC и проходящая через точку A_1 , пересекает прямую B_1C_1 в точке D . Докажите, что угол ADC прямой.
2. За круглым столом сидят 100 человек — рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них ровно один друг, причем у рыцаря этот друг — лжец, а у лжеца этот друг — рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «да». Сколько из остальных могли также ответить «да»? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)
3. Натуральное число n таково, что числа $2n + 1$ и $3n + 1$ являются точными квадратами. Может ли при этом число $5n + 3$ быть простым?
4. В компании из семи человек любые шесть могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.