Периодичность и показатели

9 класс

15.10.15

Несколько формулировок.

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется *периодической* с периодом T, если начиная с некоторого $n = n_0$ $a_n + T = a_n$ для всех n.

Участок последовательности до начала первого периода называется *предпериодом.*

Задачи для обсуждения.

1. а) На доске отмечено несколько точек. Из каждой точки проведена ровно одна стрелка в какую-то из других точек. Докажите, что, двигаясь по стрелкам, рано или поздно начнешь ходить по циклу.
   б) Докажите, что если, кроме того, в каждую из точек ведет ровно одна стрелка, то, начав из любой точки, рано или поздно попадешь в нее снова.

2. Некоторая комбинация поворотов граней вывела кубик Рубика из собранного состояния. Докажите, что кубик можно снова собрать, повторив эту комбинацию еще несколько раз.

3. В числовой последовательности $6, 0, 0, 9, 5, 4, 8, \ldots$ каждый член, начиная с пятого, равен последней цифре суммы предшествующих четырёх членов.
   а) Докажите, что в этой последовательности еще раз встретится участок $6, 0, 0, 9$.
   б) Докажите, что это произойдет не позднее, чем через 10000 шагов.

4. Пусть a, n – взаимно простые числа. Рассмотрим последовательность остатков по модулю n следующих чисел $1, a, a^2, a^3 \ldots$. Докажите, что эта последовательность периодическая и не содержит предпериода.

Определение. Минимальный период последовательности остатков из 4 задачи называется *показателем a по модулю n*. Далее будем обозначать его буквой d.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Зафиксируем взаимно простые числа a и n.
   а) Докажите, что d – показатель a по модулю n тогда и только тогда, когда d – наименьшее такое натуральное число, что $(a^d - 1)$ делится на n.
   б) Пусть d – показатель a по модулю n. Пусть $a^l \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите, что $d \mid l$.
   в) Докажите, что $a^s \equiv a^r \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $s \equiv r \pmod{d}$.
   г) Докажите, что показатель любого числа по модулю n (взаимно простого с n, конечно) делит $\varphi(n)$ (функция Эйлера).

2. Найдите все простые p и q такие, что $q \mid 2^p - 1$ и $p \mid 2^q - 1$.

3. Докажите, что если $a > 1$, то n делит $\varphi(a^n - 1)$.

4. а) Пусть $p > 2$ – простое число. Докажите, что любой простой делитель числа $(a^p - 1)$ или делит $(a - 1)$ или имеет вид $2px + 1$.
   б) Выведите отсюда, что простых чисел вида $2pk + 1$ бесконечно много.

5. а) Докажите, что любой нечетный простой делитель числа $a^{2^k} + 1$ имеет вид $2^{k+1}x + 1$.
   б) Докажите, что простых чисел вида $2^{k+1}x + 1$ бесконечно много.

6. Пусть p и q — простые числа, большие 5. Докажите, что если $p \mid 2^q + 3^q$, то $q < p$.