

Графы + Индукция

9 класс

08.10.15

1. *Деревом* называется связный граф без циклов. Докажите, что в дереве с n вершинами содержится ровно $n - 1$ ребро.
2. В стране 2015 городов. Из каждого города выходит не более 100 дорог. Докажите, что можно распределить все города по 101 субъекту так, чтобы любые два города из одного субъекта не были соединены дорогой.
3. В некоторой стране каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой.
4. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым из остальных одну партию. Доказать, что участников можно так занумеровать, что окажется, что ни один участник не проиграл непосредственно за ним следующему.
5. Граф называется *ориентированным*, если его рёбрам присвоено направление. Докажите, что в полном ориентированном графе можно поменять одно ребро на противоположное таким образом, что он станет сильно связным. (Ориентированный граф называется *сильно связным*, если из любой его вершины можно добраться в любую другую, двигаясь только по стрелкам).
6. В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.
7. Дан граф, в котором $2n$ вершин и $n^2 + 1$ ребер. Докажите, что в нем
 - а) хотя бы один треугольник;
 - б) хотя бы n треугольников.