

Неравенства

9 класс

5.10.15

Вспомним неравенства о средних.

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

1. Пусть $a > 0$. Найдите минимальное значение выражения

- а) $a + \frac{1}{a}$;
б) $a^3 + \frac{1}{a}$.

2. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{d}} + \sqrt{\frac{c+d}{a}} + \sqrt{\frac{d+a}{b}} \geq 4\sqrt{2}$$

3. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d, e выполнено неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$$

4. Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{x_1^2 + (1-x_2)^2} + \sqrt{x_2^2 + (1-x_3)^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + (1-x_1)^2}$$

5. Докажите, что для положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$2^{10}(a + b^2 + c^4)^7 \geq 7^7(abc)^4$$

6. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ac$

7. Докажите, что для положительных чисел a, b, c таких, что $a + b + c = 1$, выполнено неравенство

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}$$