Игры. Выигрышные и проигрышные позиции.

9 класс

17.09.15

Разминка.

1. На столе лежит 25 спичек. За ход разрешается взять 1, 2 или 4 спички. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?
2. В одной из клеток шахматной доски стоит ладья. За ход разрешается сдвинуть ладью на любое количество клеток либо вверх, либо вправо. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

Задачи.

1. На столе лежит 300 монет. За ход разрешается забрать не более половины имеющихся монет. Проигрывает тот, кто не может забрать хотя бы одну монету. Кто выиграет при правильной игре?
2. Двое ребят играют в такую игру. Первый называет число от 2 до 9, второй умножает его на любое число от 2 до 9, первый умножает результат на любое число от 2 до 9 и т.д. Выигрывает тот, у кого впервые получилось число, большее 1000. Кто выиграет при правильной игре?
3. а) На доске 16×16 стоит ферзь. Его можно двигать либо вправо, либо вверх, либо вверх-вправо. Проигрывает тот, кто не может ходить. При каких начальных положениях ферзя второй игрок победит?
   б) В двух кучках n и k камней соответственно. За ход разрешается взять либо несколько камней из одной кучки, либо поровну из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких n и k, не превосходящих 15, у первого игрока нет выигрышной стратегии?
4. Уголком размера $n \times m$, где $m, n \geq 2$, называется фигура, получаемая из прямоугольника размера $n \times m$ клеток удалением прямоугольника размера $(n-1) \times (m-1)$ клеток. Два игрока по очереди делают ходы, заключающиеся в закрашивании в уголке произвольного ненулевого количества клеток, образующих прямоугольник или квадрат. Пропускать ход или красить одну клетку дважды нельзя. Проигрывает тот, после чьего хода все клетки уголка окажутся окрашенными. Кто из игроков победит при правильной игре?
5. Игра начинается с числа 1000. За ход разрешается вычесть из имеющегося числа любое, не превосходящее его, натуральное число, являющееся степенью двойки ($1 = 2^0$). Выигрывает тот, кто получит ноль.
6. У дракона есть 2015! золотых монет. Два хоббита по очереди воруют у дракона по p^n монет, где p – простое число, а $n = 1, 2, \ldots$ (например, первый берет 9 монет, второй 7, первый 64 и т.д.). Того, кто не может ничего украсть, съедает дракон. Может ли кто-нибудь из хоббитов гарантировать своё выживание?