

## Функциональные уравнения

группа 9-1

12.05.2016

В задачах этого листика требуется найти все функции с указанными областью определения и множеством значений, при всех значениях аргументов удовлетворяющие данному соотношению.

1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y).$
2.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x + y) - f(x - y) = 4xy.$
3. При каких  $a \in (0, +\infty)$  существует такая  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x + af(y) \leq y + f(f(x))$ ?
4.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad f([x]y) = f(x)[f(y)].$
5.  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1], \forall x \in [0, 1] \quad f(2x - f(x)) = x.$

Такая запись подразумевает, в частности, что  $\forall x \in [0, 1]$  левая часть определена.

6.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y).$
  7.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(xf(y)) = (1 - y)f(xy) + x^2y^2f(y).$
- 

## Функциональные уравнения

группа 9-1

12.05.2016

В задачах этого листика требуется найти все функции с указанными областью определения и множеством значений, при всех значениях аргументов удовлетворяющие данному соотношению.

1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y).$
2.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x + y) - f(x - y) = 4xy.$
3. При каких  $a \in (0, +\infty)$  существует такая  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x + af(y) \leq y + f(f(x))$ ?
4.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad f([x]y) = f(x)[f(y)].$
5.  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1], \forall x \in [0, 1] \quad f(2x - f(x)) = x.$

Такая запись подразумевает, в частности, что  $\forall x \in [0, 1]$  левая часть определена.

6.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y).$
7.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(xf(y)) = (1 - y)f(xy) + x^2y^2f(y).$