

## Многочлены, часть 2

группа 9-1

14.04.2016

1. Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?
  2. Известно, что многочлен  $ax^5 + bx^4 + c$  имеет хотя бы три различных действительных корня. Докажите, что  $cx^5 + bx + a$  имеет хотя бы три различных действительных корня.
  3. Известно, что некоторый многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения. Докажите, что все его коэффициенты рациональны.
  4. Даны вещественные числа  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ . Известно, что  $x_1 < x_2 < x_3, y_1 < y_2 < y_3, x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3$  и  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = y_1y_2 + y_2y_3 + y_1y_3$ . Докажите, что если  $x_1 < y_1$ , то  $x_2 > y_2$  и  $x_3 < y_3$ .
  5. Пусть  $f(x) = x^3 - 4x, g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ . Докажите, что для любых действительных  $a$  и  $b$  ( $a + b \neq 0$ ) многочлен  $af(x) + bg(x)$  имеет три различных действительных корня.
- 

## Многочлены, часть 2

группа 9-1

14.04.2016

1. Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?
2. Известно, что многочлен  $ax^5 + bx^4 + c$  имеет хотя бы три различных действительных корня. Докажите, что  $cx^5 + bx + a$  имеет хотя бы три различных действительных корня.
3. Известно, что некоторый многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения. Докажите, что все его коэффициенты рациональны.
4. Даны вещественные числа  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ . Известно, что  $x_1 < x_2 < x_3, y_1 < y_2 < y_3, x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3$  и  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = y_1y_2 + y_2y_3 + y_1y_3$ . Докажите, что если  $x_1 < y_1$ , то  $x_2 > y_2$  и  $x_3 < y_3$ .
5. Пусть  $f(x) = x^3 - 4x, g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ . Докажите, что для любых действительных  $a$  и  $b$  ( $a + b \neq 0$ ) многочлен  $af(x) + bg(x)$  имеет три различных действительных корня.