Комплексные числа

группа 9-1
24.02.2016

Определение. *Комплексным числом* z называется пара вещественных чисел (x, y). Число x называется *вещественной частью* комплексного числа z; число y — *мнимой частью*. Обозначения: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. На множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел определены операции *сложения* $(+)$ и *умножения* $(\cdot)$ следующим образом:

1. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_2 + y_2)$.

2. $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Комплексные числа естественным образом отождествляются с векторами координатной плоскости. При этом каждый ненулевой вектор v с координатами (x, y) однозначно задаётся своей длиной $|v|$ и ориентированным углом $\varphi \pmod{2\pi}$ с положительной полуосью Ox. Число $|v|$ называется *модулем* комплексного числа z; угол φ — *аргументом*. Обозначения: $|z|$ и $\operatorname{Arg} z$ соответственно. Справедливы формулы: $\operatorname{Re} z = |z| \cdot \cos\varphi$, $\operatorname{Im} z = |z| \cdot \sin\varphi$, где $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

На множестве комплексных чисел также определена операция *комплексного сопряжения*: если $z = (x, y)$, то $\overline{z} = (x, -y)$.

1. Докажите следующие тригонометрические тождества ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

   а) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

   б) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

   в) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

   г) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$.

2. (*Геометрическая интерпретация операций*) Очевидно, что сложение комплексных чисел соответствует сложению векторов. Докажите, что при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

3. (*Алгебраические свойства операций*). Докажите утверждения ($\mathbb{C}^*$ — это $\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$):

   а) $\forall\, u, v, w \in \mathbb{C}$ выполнено $(u + v) + w = u + (v + w)$ (*ассоциативность сложения*).

   б) $\exists\, \mathbf{0} \in \mathbb{C}$, такой что $\forall\, z \in \mathbb{C}$ верно $\mathbf{0} + z = z + \mathbf{0} = z$ (*нейтральный элемент по сложению*).

   в) $\forall\, u \in \mathbb{C}\ \exists!\ v \in \mathbb{C}$, такой что $u + v = v + u = \mathbf{0}$ (этот v далее обозначается $-u$).

   г) $\forall\, u, v \in \mathbb{C}$ выполнено $u + v = v + u$ (*коммутативность сложения*).

   д) $\forall\, u, v, w \in \mathbb{C}$ выполнено $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$ (*ассоциативность умножения*).

   е) $\exists\, \mathbf{1} \in \mathbb{C}$, такой что $\forall\, z \in \mathbb{C}$ верно $\mathbf{1} \cdot z = z \cdot \mathbf{1} = z$ (*нейтральный элемент по умножению*).

   ж) $\forall\, u \in \mathbb{C}^*\ \exists!\ v \in \mathbb{C}^*$, такой что $u \cdot v = v \cdot u = \mathbf{1}$ (этот v далее обозначается $1/u$).

   з) $\forall\, u, v \in \mathbb{C}$ выполнено $u \cdot v = v \cdot u$ (*коммутативность умножения*).

   и) $\forall\, u, v, w \in \mathbb{C}$ выполнено $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$ (*дистрибутивность*).

   Информация для общего развития. Множество с введённой на нём операцией называется *группой*, если для этой операции выполнены свойства (= аксиомы) **а**, **б**, **в**. Множество называется *коммутативной группой*, если выполнены свойства **а**, **б**, **в**, **г**. Множество с двумя введёнными операциями (традиционно обозначаемыми «+» и «·») называется *полем*, если выполнены все свойства задачи 3. Эти свойства можно кратко переформулировать так: множество $\mathbb{K}$ с введёнными на нём операциями называется полем, если 1) $\mathbb{K}$ является группой по сложению; 2) $\mathbb{K}^*$ ($= \mathbb{K} \setminus 0$) является группой по умножению; 3) сложение и умножение связаны дистрибутивностью. Примеры полей: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, где p — простое число.

4. Приведите примеры групп (не менее трёх некоммутативных, не менее трёх коммутативных).

Комплексные числа

группа 9-1

24.02.2016

5. Поставим в соответствие каждому вещественному числу x комплексное число $(x, 0)$. Докажите: (в пунктах ниже символы в левой части равенства означают операции в $\mathbb{R}$, а в правой — в $\mathbb{C}$)

   а) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ выполнено $(x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0)$.

   б) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ выполнено $(x \cdot y, 0) = (x, 0) \cdot (y, 0)$.

   в) $\forall\, x \in \mathbb{R}$ верно $(-x, 0) = -(x, 0)$.

   г) $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$ верно $(1/x, 0) = (1, 0)/(x, 0)$.

   Имеем: вещественные числа вкладываются в комплексные числа, причём все операции согласованы.

   Далее: введём обозначение $i = (0, 1)$. Тогда любое комплексное число (x, y) можно представить в виде:

   $$(x, y) = (x, 0) \cdot (1, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot i = x + yi.$$

   Легко видеть, что $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Обозначения вида $x + yi$ оказываются удобны для выполнения арифметических операций: достаточно раскрывать все скобки с помощью алгебраических свойств и использовать тождество $i^2 = -1$.

6. Докажите справедливость свойств комплексного сопряжения:

   а) $\forall\, u, v \in \mathbb{C}$ верно $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$.

   б) $\forall\, u, v \in \mathbb{C}$ верно $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$.

   в) $\forall\, u \in \mathbb{C}$ выполнено $\overline{-u} = -\overline{u}$.

   г) $\forall\, u \in \mathbb{C}^*$ выполнено $\overline{1/u} = 1/\overline{u}$.

   д) $\forall\, z \in \mathbb{C}$ верно $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$.

   е) $\forall\, z \in \mathbb{C}$ верно $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$.

   ж) $\forall\, z \in \mathbb{C}^*$ справедливо $|z|^2 = z \cdot \overline{z} \Leftrightarrow 1/z = \overline{z}/|z|^2$.

7. (*Формула Муавра*) Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$. Тогда $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

8. (бес)Полезные технические упражнения:

   а) Вычислите и нарисуйте: $\frac{1}{1+7i} + \frac{1}{5-5i}$, $\frac{3-i}{1-2i}$, $(1 + i)^5$.

   б) Решите квадратные уравнения: $z^2 = -1$, $z^2 + 2z + 2 = 0$, $z^2 - 3z + (3 + i) = 0$.

   в) Нарисуйте на плоскости множества: $z\overline{z} = (z-1)(\overline{z}-1)$, $(z-1)/(z-i) \in \mathbb{R}$, $z\overline{z}-z-\overline{z} = 0$, $|z| = 2|z-1|$.

---

9. Докажите, что произведение ab двух целых чисел a и b, представимых в виде суммы двух квадратов, можно представить в виде суммы дух квадратов (*разложите многочлен $u^2 + v^2$ на множители*).

10. Пусть $u, v, w \in \mathbb{C}$, причём $|u| = |v| = |w| = 1$. Докажите, что $|\frac{vw+wu+uv}{u+v+w}| = 1$.

11. Комплексное число z является корнем некоторого многочлена с вещественными коэффициентами. Докажите, что $\overline{z}$ также является корнем этого многочлена.

12. (*Окружность Аполлония*) Введите `удобную` систему комплексных координат и докажите, что ГМТ плоскости с фиксированным ($\neq 1$) отношением расстояний до двух данных точек есть окружность.