

Радикальные центры

группа 9-1

07.12.2015

Напоминание: *радикальной осью* пары неконцентрических окружностей называется прямая, на которой лежат все точки, степени которых относительно этих двух окружностей равны.

1. Даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Докажите, что радикальные оси всех трёх пар этих окружностей пересекаются в одной точке. Эта точка называется *радикальным центром* трёх окружностей.
2. На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC отмечены точки A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Докажите, что общие хорды окружностей, построенных на отрезках AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в ортоцентре треугольника.
3. Окружность, проходящая через вершины B и C трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q , а диагонали — в точках M и N . Докажите, что прямые PQ , MN и AD пересекаются в одной точке или параллельны.
4. (*Немного в сторону*) С центром в точке O построены большая окружность и маленькая окружность (маленькая лежит внутри большой). Из точки A большой окружности проведены касательные AB , AC к маленькой (B , C — точки касания). Окружность с центром A и радиусом AB пересекает большую окружность в точках M , N . Докажите, что прямая MN содержит среднюю линию треугольника ABC .
5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, причём $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K , L и M — середины отрезков AB , CD и AC соответственно. Точка H плоскости такова, что $AH \perp BC$, $CH \perp AD$. Докажите, что $MH \perp KL$.
6. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC , а K — точка пересечения перпендикуляра к BI , восстановленного в точке I , и прямой AC . Докажите, что основание перпендикуляра, опущенного из I на BK лежит на описанной окружности треугольника ABC .
7. (*Теорема Брианшона*)
 - а) (Для четырёхугольника) Докажите, что в описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей совпадает с точкой пересечения отрезков, соединяющих точки касания вписанной окружности с противоположными сторонами.
 - б) (Для шестиугольника) Докажите, что в описанном шестиугольнике главные диагонали пересекаются в одной точке.