

Комбинаторный разнобой

1. Трём математикам нарисовали на лбу по прямоугольнику (с указанием размеров) и сообщили, что из этих трёх прямоугольников можно сложить квадрат. Каждый математик не видит, что нарисовано у него на лбу, но видит лбы двух других. Первый сказал, что не может определить размеры прямоугольника у себя на лбу. Затем то же самое сказал второй математик. Найдите отношение сторон прямоугольника на лбу третьего математика.
2. (техническая задача, решать в последнюю очередь) Сколько существует слов длины n из букв А, Б и В, в которых рядом с каждой буквой стоит хотя бы одна такая же?
3. В многоугольнике проведены все диагонали из одной вершины. Стороны и проведённые диагонали раскрасили в жёлтый и красный цвета так, что жук может проползти из любой вершины в любую другую по жёлтым отрезкам. Докажите, что есть две вершины, между которыми жук не может проползти по красным отрезкам.
4. В таблице $n \times n$ отмечены некоторые $2n$ клеток. Докажите, что найдётся параллелограмм с вершинами в центрах отмеченных клеток.
5. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет присутствует и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника вершины были трёх разных цветов.
6. В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены: в них стоят звездочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в её строке совпадает с количеством звездочек в её столбце. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хотя бы одна звездочка, совпадает с количеством столбцов в таблице, в которых есть звездочка.
7. В однокруговом шахматном турнире в каждой тройке есть нашёлся человек, набравший в этой тройке полтора очка. Какое максимальное количество игроков могло принимать участие в турнире?
8. В классе 30 человек. За месяц было 29 дежурств, в каждом дежурила пара учеников. Докажите, что можно так выставить всем ученикам класса по одной оценке по 5-балльной шкале, что будет выставлена хотя бы одна пятерка, и в каждой паре дежуривших сумма оценок будет равна 8.
9. (*baby-версия теоремы Турана*) Какое наибольшее число рёбер может быть в графе без треугольников на n вершинах?