

Площадь

1. Прямая l параллельна отрезку AB , точка C лежит на этой прямой. Докажите, что площадь $\triangle ABC$ не зависит от выбора точки C .
2. В треугольнике ABC провели медиану AM . Докажите, что площади треугольников ABM и ACM равны.
3. Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1. Найдите площадь четырехугольника, образованного пересечениями прямых AN , BN , CM и DM .
4. Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих частей.
5. Отрезок, соединивший середины противоположенных сторон выпуклого четырехугольника, разделили его площадь пополам. Докажите, что этот четырехугольник — трапеция или параллелограмм.
6. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные прилежающим к ним сторонам.
7. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опустили высоты на две другие его стороны. Докажите, что площадь шестиугольника, ими ограниченного, равна половине площади треугольника.
8. В угле XOY отмечена точка A . Проведите через точку A прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.
9. (Прямая Ньютона) В описанном четырехугольнике $ABCD$ отметили середины диагоналей M и N и центр вписанной окружности O . Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой. Указания:
 - (a) Докажите, что $S(\triangle ABN) + S(\triangle CDN) = S(ABCD)/2$. Докажите, что аналогичный факт верен и для точек O и M .
 - (b) Продлите стороны AB и CD до пересечения в точке X и отложите на луче XB отрезок XU , равный AB и аналогично на другом луче отрезок XZ , равный CD .
 - (c) Докажите, что $S(\triangle ABI) + S(\triangle CDI) = S(IYXZ)$ для любой точки I из четырехугольника $ABCD$.
10. (Прямая Гаусса) В четырехугольнике $ABCD$ прямые AB и CD продлили до пересечения в точке X , прямые BC и AD — до пересечения в точке Y . Докажите, что середины отрезков AC , BD и XY лежат на одной прямой.