

Деревья

Связный граф без циклов называется *деревом*.

- Пусть в графе нет циклов и вершин степени ноль. Докажите, что есть вершина степени один. Такая вершина, кстати, ещё называется *висячей*.
 - Докажите, что их на самом деле хотя бы две.
 - Пусть в графе есть вершина степени d . Докажите, что висячих вершин на самом деле хотя бы d .
- Докажите, что в дереве с n вершинами всегда ровно $n - 1$ ребро.
- Каким может быть количество висячих вершин в дереве на n вершинах?
- Дорожная сеть Табулистана является деревом. Если между городами нет дороги, то между ними контрабандисты прокладывают тропинку. Найдите все возможные карты дорог, при которых граф тропинок будет несвязен.
- Непустое подмножество клеток доски $n \times n$ назовем *чётным*, если в каждой строке и в каждом столбце четное число клеток из этого подмножества. Найдите такое минимальное k , что среди любых k клеток доски $n \times n$ можно выбрать четное подмножество.
- Пете перехватил зашифрованное сообщение, где было написано, что в Очень Важном Дереве ровно m висячих вершин, а также написаны все попарные расстояния между этими вершинами. Помогите Пете восстановить дерево.
- (почти гипотеза Улама) Петя Торт загадал дерево на n вершинах. После чего для каждой вершины он нарисовал загаданное дерево без этой вершины на отдельной карточке (возможно, изменив положения вершин и форму ребер). Докажите, что Катя сможет восстановить исходное дерево, глядя только на эти карточки.
- В дереве на n вершинах степени вершин не превосходят d . Докажите, что найдется ребро, после удаления которого получаются два дерева размера не меньше $\lceil \frac{n-2}{d} \rceil$.
- Имеется многоугольник с n вершинами. Докажите, что в нем найдется диагональ, лежащая целиком внутри него, такая, что после её проведения получаются многоугольники с не менее чем $\frac{n}{3} - 1$ сторонами. (можно без доказательства пользоваться тем фактом, что в любом многоугольнике найдется диагональ, лежащая внутри)