

Он просто заикался

Числа Фибоначчи задаются условиями $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ и $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

1. Докажите тождества:

(a) $f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} = f_{n+1} - 1$;

(b) $f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$.

2. Про следующие количества докажите, что они равны f_n :

(a) количество последовательностей из единиц и двоек с суммой $n - 1$;

(b) количество способов замостить доминошками клетчатый прямоугольник $2 \times (n - 1)$;

3. (a) Докажите тождество $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$;

(b) Докажите, что для любого n найдется прямоугольник, который можно разрезать на n квадратов так, чтобы среди них было не более двух равных.

4. Вычислить сумму $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \dots + \frac{f_n}{f_{n-1} f_{n+1}}$.

5. Требуется сделать набор гирек, каждая из которых весит целое число граммов, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 до 55 граммов включительно даже в том случае, если некоторые гирьки потеряны (гирьки кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую). Необходимо подобрать:

(a) 10 гирек, из которых может быть потеряна любая одна;

(b) 12 гирек, из которых могут быть потеряны любые две.

6. Загадано число от 1 до 144. Разрешается выделить одно подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ да надо заплатить 2 рубля, за ответ нет — 1 рубль. Какая наименьшая сумма денег необходима для того, чтобы наверняка угадать число?

7. Талантливый мальчик Петя Торт загадал натуральное число от 1 до 1000. Вы можете задавать ему вопросы вида «Принадлежит ли твоё число множеству X ?». На первый вопрос он точно ответит правильно; но потом в какой-то момент у него может испортиться настроение, и он начнёт врать. Обратное настроение не улучшится. За какое наименьшее число вопросов можно гарантированно узнать загаданное число? (указание: эта задача не имеет никакого отношения к числам Фибоначчи — это добавка к прошлому разу)