

Турниры как графы

Гамильтонов цикл (путь) — цикл (незамкнутый путь) в графе, проходящий через все его вершины ровно по одному разу.

Ориентированный граф *сильно связан*, если из любой его вершины можно по рёбрам добраться до любой другой.

Турниром будем называть ориентированный граф, где между любыми двумя вершинами проведено ребро.

1. Для любого $n > 2$ приведите пример турнира, в котором нет циклов, и турнира, в котором ровно один цикл.
2. В турнире в каждую вершину входит хотя бы одно ребро и из каждой хотя бы одно выходит. Докажите, что найдётся цикл длины 3.
3. Докажите, что если турнир не сильно связан, то найдётся множество вершин A такое, что из любой вершины из A в любую вершину не из A выходит ориентированное ребро.
4. (*важный факт*) Назовём *царём* вершину в графе, расстояние от которой до любой другой вершины меньше либо равно двум. Докажите, что в любом турнире найдётся царь.
5. Докажите, что если в турнире ровно один царь, то он победил всех других участников.
6. Докажите, что в турнире не может быть ровно двух царей.
7. (*важный факт*) Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь. (указание: докажите это индукцией по количеству вершин)
8. Докажите, что в сильно связанном турнире есть гамильтонов цикл.
9. В одном государстве 100 городов и каждый соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения не более чем на одной дороге так, чтобы от каждого города можно было доехать до любого другого.