

Серия 17. Уравнения в целых числах

1. Решите в целых числах уравнение

(a) $3x + 2y = 1$.

(b) $95x + 228y = 38$.

(c) $51x + 136y = 154$.

2. Решите в простых числах уравнение $x^2 + y^2 = z - 16$.

3. Решите в целых числах уравнение $x^3 - y^3 = 63$.

4. Решите в натуральных числах уравнение $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$.

5. Решите в целых числах уравнение $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

6. У Димы был мешочек монет. Вася пересчитал их и выяснил, что

- если их разложить на пять равных кучек, то останутся две лишние монеты
- если их разложить на четыре равные кучки, то останется одна лишняя монета
- если их разложить на три равные кучки, то лишних монет не останется

Какое наименьшее количество монет могло быть у Димы?

7. В таблицу, содержащую a строк и b столбцов, вписали по строкам натуральные числа от 1 до ab в порядке возрастания, начиная с первой строки. Известно, что число 20 находится в третьей строке, 41 - в пятой, а 103 - в последней. Найдите все возможные значения a и b .

8. Докажите, что если a и b взаимно просты с 65, то $a^{12} - b^{12}$ делится на 65.

9. Произведение различных натуральных чисел a, b, c, d - точный квадрат. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ представляется в виде суммы пяти квадратов натуральных чисел.

10. Сколько существует чисел, представимых как в виде $\frac{3n-4}{5n-3}$, так и в виде $\frac{4k-3}{7k-6}$, где n и k - некоторые целые числа?

Непрерывная олимпиада — 17.

1. У 15 ребят есть 8 одинаковых яблок. Разрешается резать яблоко на равные части, но не более, чем на пять частей. Как разделить яблоки между ребятами так, чтобы всем досталось поровну? (Разные яблоки можно резать на разное число частей).

2. Найдите количество способов раздать 2016 детям конфеты так, чтобы каждому ребенку досталось не более пяти конфет (возможно, ни одной), и общее количество конфет делилось на 3.

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена медиана AM . Оказалось, что $\angle MAC = 30^\circ$. Докажите, что треугольник ABC - равносторонний.

4. Ненулевые числа a, b и c таковы, что $a^2 - b^2 = bc$ и $b^2 - c^2 = ac$. Докажите, что $a^2 - c^2 = ba$.

5. В 99 коробках лежат апельсины и яблоки. Докажите, что можно выбрать 50 из них так, чтобы в них суммарно было больше половины всех апельсинов и больше половины всех яблок.