

Определение 1. Вершины a и b ориентированного графа G назовем *связанными*, если в графе G существуют пути из a в b и из b в a .

Определение 2. Ориентированный граф G называется *сильно связным*, если любые его две вершины связаны.

Определение 3. Построим для нашего ориентированного графа G граф компонент сильной связности $C(G)$, вершины которого соответствуют компонентам сильной связности ориентированного графа G . Проведем в графе $C(G)$ ориентированное ребро от вершины V_i к вершине V_j тогда и только тогда, когда в графе G есть ребро, направленное от вершины компоненты V_i к вершине компоненты V_j .

Определение 4. Пусть V_i – компонента сильной связности ориентированного графа G . Назовем эту компоненту *промежуточной*, если в графе $C(G)$ существует ребро, входящее в V_i , и существует ребро, выходящее из V_i . В противном случае назовем компоненту V_i *крайней*.

1. Докажите, что в графе $C(G)$ нет циклов.

2. В ориентированном графе 200 вершин, из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро, и в каждую вершину входит хотя бы одно ребро. Докажите, что можно добавить не более 100 новых ориентированных ребер так, чтобы этот граф стал сильно связным. (Между двумя вершинами может быть проведено несколько ребер, петель в этом графе нет.)

3. Докажите, что для сильно связного ориентированного графа G на n вершинах выполняются следующие утверждения.

а) Существует сильно связный остовный подграф графа G , в котором не более $2n - 2$ ребер.

б) Если в графе G между любыми двумя вершинами проведено не более одного ребра, то существует сильно связный остовный подграф графа G , в котором не более $2n - 3$ ребер.

в) Для всех $n \geq 3$ постройте примеры графов, для которых оценки предыдущих пунктов точны.

4. Докажите, что компоненты сильной связности полного ориентированного графа можно пронумеровать G_1, \dots, G_k , так, чтобы для всех $i < j$ в $C(G)$ было ребро, ведущее от G_i к G_j .

5. Докажите, что в полном сильно связном ориентированном графе существует гамильтонов цикл (т.е. цикл, проходящий по каждой вершине ровно один раз).

6. Докажите, что в сильно связном полном ориентированном графе с четырьмя и более вершинами существует вершина, удаление которой не нарушает сильной связности графа.

7. Дан полный граф G с n вершинами.

а) Докажите, что при $n > 7$ в этом графе можно выбрать вершину v и поменять направление всех ребер с концами в v так, чтобы получился сильно связный ориентированный граф.

б) Найдите все полные ориентированные графы на не более 7 вершинах, для которой такой вершины не существует.

Определение 1. Вершины a и b ориентированного графа G назовем *связанными*, если в графе G существуют пути из a в b и из b в a .

Определение 2. Ориентированный граф G называется *сильно связным*, если любые его две вершины связаны.

Определение 3. Построим для нашего ориентированного графа G граф компонент сильной связности $C(G)$, вершины которого соответствуют компонентам сильной связности ориентированного графа G . Проведем в графе $C(G)$ ориентированное ребро от вершины V_i к вершине V_j тогда и только тогда, когда в графе G есть ребро, направленное от вершины компоненты V_i к вершине компоненты V_j .

Определение 4. Пусть V_i – компонента сильной связности ориентированного графа G . Назовем эту компоненту *промежуточной*, если в графе $C(G)$ существует ребро, входящее в V_i , и существует ребро, выходящее из V_i . В противном случае назовем компоненту V_i *крайней*.

1. Докажите, что в графе $C(G)$ нет циклов.
2. В ориентированном графе 200 вершин, из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро, и в каждую вершину входит хотя бы одно ребро. Докажите, что можно добавить не более 100 новых ориентированных ребер так, чтобы этот граф стал сильно связным. (Между двумя вершинами может быть проведено несколько ребер, петель в этом графе нет.)
3. Докажите, что для сильно связного ориентированного графа G на n вершинах выполняются следующие утверждения.
 - а) Существует сильно связный остовный подграф графа G , в котором не более $2n - 2$ ребер.
 - б) Если в графе G между любыми двумя вершинами проведено не более одного ребра, то существует сильно связный остовный подграф графа G , в котором не более $2n - 3$ ребер.
 - в) Для всех $n \geq 3$ постройте примеры графов, для которых оценки предыдущих пунктов точны.
4. Докажите, что компоненты сильной связности полного ориентированного графа можно пронумеровать G_1, \dots, G_k , так, чтобы для всех $i < j$ в $C(G)$ было ребро, ведущее от G_i к G_j .
5. Докажите, что в полном сильно связном ориентированном графе существует гамильтонов цикл (т.е. цикл, проходящий по каждой вершине ровно один раз).
6. Докажите, что в сильно связном полном ориентированном графе с четырьмя и более вершинами существует вершина, удаление которой не нарушает сильной связности графа.
7. Дан полный граф G с n вершинами.
 - а) Докажите, что при $n > 7$ в этом графе можно выбрать вершину v и поменять направление всех ребер с концами в v так, чтобы получился сильно связный ориентированный граф.
 - б) Найдите все полные ориентированные графы на не более 7 вершинах, для которой такой вершины не существует.